Skript zur Vorlesung

Analysis I für Informatiker

im Wintersemester 2005/2006

Dr. Walter Spann

Satz: Bernhard Frauendienst

Inhaltsverzeichnis

§ 0. Grundlagen

In diesem Abschnitt setzen wir $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ als aus der Schulmathematik bekannt voraus.

Aussagenlogik

Primäres Ziel ist die Einführung von Schreibweisen und die Verdeutlichung an Beispielen. Eine Aussage ist eine Zeichenreihe, der sich objektiv genau einer der Wert wahr (w) oder falsch (f) zuordnen lässt.

Beispiel: 4 ist eine gerade Zahl (w)

8 ist eine ungerade Zahl (f)

Jede (ohne Rest) durch 4 teilbare ganze Zahl ist gerade (w)

Aus Aussagen A und B lassen sich durch spezielle Zeichen (logische Operatoren) weitere Aussagen bilden:

$\wedge$	„und“	} binär
$\vee$	„oder“	
$\neg$	„nicht“	unär

Die Wirkung logischer operatoren kann durch Wahrheitstafeln beschrieben werden

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

A	$\neg A$
w	f
f	w

Äquivalenz: $\Longleftrightarrow$

Sprechweisen für $A \Longleftrightarrow B$:

- A ist äquivalent zu B
- B ist äquivalent zu A
- A genau dann, wenn B
- B genau dann, wenn A
- A ist notwendig und hinreichend für B
- B ist notwendig und hinreichend für A

Beispiel: sei n eine natürliche Zahl ($n \in \mathbb{N}$)

(n durch 6 teilbar) $\Longleftrightarrow$ (n durch 3 teilbar) $\wedge$ (n durch 2 teilbar) (wahr)

Implikation: $\Longrightarrow$

A	B	$A \Rightarrow B$	
w	w	w	
w	f	f	
f	w	w	} übliche Ergänzung
f	f	w	

Sprechweisen für $A \Longrightarrow B$:

- Aus A folgt B
- Wenn A, dann B
- A ist hinrechend für B
- B ist notwendig für A

Beispiel: (n durch 6 teilbar) $\Longrightarrow$ (n durch 3 teilbar) (wahr)

Motivation für die „Ergänzung“:

1. Man möchte erreichen, dass die Äquivalenz $A \Longleftrightarrow B$ auch als $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ aufgefasst werden kann.
2. „$\Longleftrightarrow$“ und „$\Longrightarrow$“ sollen unterschiedliche Operatoren sein.

$A \Rightarrow B$ und $(\neg A) \vee B$ besitzen dieselbe Wahrheitstafel.

A	B	$A \Rightarrow B$	$(\neg A) \vee B$
w	w	w	$f \vee w = w$
w	f	f	$f \vee f = f$
f	w	w	$w \vee w = w$
f	f	w	$w \vee f = w$

Anders ausgedrückt:
Die Aussage $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow \big((\neg A) \vee B\big)$ ist allgemeingültig.

Um nicht zuviele Klammern schreiben zu müssen, vereinbaren wir folgende Vorrangregel:

$\neg$
$\wedge$
$\vee$
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$

$\downarrow$ (abnehmender Vorrang von oben nach unten)

Beispiel: $A \wedge \neg B \vee C$ ist zu interpretieren als $\big(A \wedge (\neg B)\big) \vee C$

Exkurs:

a	b	$a \cdot b$	$a + b$
1	1	1	$2 \neq 0 \Rightarrow 1$
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

0.1 Satz *Die folgenden Aussagen sind allgemein gültig*

(a) $A \vee B \Longleftrightarrow B \vee A$

(b) $A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$

(c) $(A \vee B) \vee C \Longleftrightarrow A \vee (B \vee C)$

(d) $(A \wedge B) \wedge C \Longleftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

(e) $(A \vee B) \wedge C \Longleftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

(f) $(A \wedge B) \vee C \Longleftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

(g) $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(h) $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(i) $\neg\neg A \Longleftrightarrow A$ *„doppelte Verneinung“*

(j) $A \vee \neg A$ *„Satz vom ausgeschlossenen Dritten“*

(k) $\neg(A \wedge \neg A)$ *„Wideresspruchsfreiheit“*

Beweis durch Nachrechnen mit Wahrheitstafeln.

Folgende Schlussweisen werden häufig verwendet:

0.2 Satz *Allgemein gültig sind*

(a) $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big) \Longleftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$

(b) $\big((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)\big) \Longrightarrow (A \Leftrightarrow C)$

(c) $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Longrightarrow (A \Rightarrow C)$

Die letzten beiden Aussagen werden häufig in der (nicht ganz korrekten) Form

$$A \Longleftrightarrow B \Longleftrightarrow C \qquad \text{bzw.} \qquad A \Longrightarrow B \Longrightarrow C$$

geschrieben.

Das verallgemeinert sich in nahliegender Weise auf

$$A_1 \Longleftrightarrow A_2 \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow A_n \qquad \text{bzw.} \qquad A_1 \Longrightarrow A_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow A_n$$

.

Mit dieser Schreibweise ergibt sich aus Satz 0.1:

$$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee B) \Longleftrightarrow \big(\neg A \vee (\neg\neg B)\big) \Longleftrightarrow \big(\neg(\neg B) \vee \neg A\big) \Longleftrightarrow (\neg A \Longrightarrow \neg A)$$

Kontrapositionsgesetz

Die Aussage

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$$

ist allgemeingültig.

Beispiele: n ist durch 6 teilbar $\Longrightarrow$ n ist durch 3 teilbar

n ist nicht durch 3 teilbar $\Longrightarrow$ n ist nicht durch 6 teilbar

Nicht allgemein gültig ist $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$

Beispiel: $n = 9$: $n = 9$ ist nicht durch 6 teilbar, aber durch 3

Mengenbegriff und Elementschreibweise

Standpunkt: Naive Mengenlehre

0.3 Definition *(Georg Cantor, 1895) Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten M unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*
Schreibweise:

$a \in M$	a ist Element von M
$a \notin M$	$\neg(a \in M)$, d.h. a ist (kein) Element von M

Beispiele:

$\emptyset = \{\}$ (leere Menge)	Menge, die keine Elemente enthält
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$	rationale Zahlen
(genauer: $\left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge \neg(q = 0)\right\}$)	
$\mathbb{R}$	reele Zahlen

Es kommt weder auf die Reihenfolge der Elemente an, noch darauf, ob eine Element mehrfach vorkommt.

Beispiel: $\{1, 1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$

Mengen können Elemente von Mengen sein, z.B. $\big\{\{1, 2, \}, 3, \{3, 4, 5\}, \{\{6\}\}\big\}$.

Quantorenschreibweise

Oft betrachtet man Aussagen, die von einer Variablen abhängen, z.B.

n ist eine gerade Zahl

$x^2 - 3x + 2 = 0$

Um Aussagen zu formulieren, die sich auf alle oder zumindesten eine Variablenbelegung bezeichnen, gibt es spezielle Zeichen (Quantoren): $\forall$ „für alle“ $\exists$ „es existiert mindestens eine“

Beispiele: $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n$ ist eine gerade zahl (falsch)

$\exists_{x\in\mathbb{R}} : x^2 - 3x + 2 = 0$ (wahr)

Negation von:

$\forall_{x\in M} : A(x)$

$\exists_{x\in M} : \neg A(x)$

Beispiele: $\exists_{x\in\mathbb{R}} : x^2 - 3x + 2 = 0$ (wahr)

$\neg\left(\exists_{x\in\mathbb{R}} : x^2 - 3x + 2 = 0\right)$ (falsch)

$\forall_{x\in\mathbb{R}} : x^2 - 3x + 2 \neq 0$ (falsch)

Oft gibt es Quantoren mit mehreren Variablen. Dabei können zwei benachbarte gleiche Quantoren problemlos vertauscht werden.

Beispiel: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}} : (x-y)^2 \geq 0$

$\forall_{y\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}} : (x-y)^2 \geq 0$

Verschiedene Quantoren dürfen nicht vertauscht werden

Beispiel: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{n\in\mathbb{N}} : n > x$ (wahr)

[Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine größere natürliche Zahl n]

hierbei wird n abhängig von x gewählt

ist nicht gleichbedeutend mit

$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}} : n > x$ (falsch)

[Es gibt eine natürliche Zahl n, die größer ist als alle reellen Zahlen]

hier ist n unabhängig von x

Negation mehrerer Quantoren erfolgt durch Umkehren jedes einzelnen Quantors (und Negieren der Aussage).

Beispiel: $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{p\,\text{Primzahl}} : p > n$ (wahr)

Negation:

$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{p\,\text{Primzahl}} : p \leq n$ (falsch)

Mengenoperationen

0.4 Definition *Seien A,B Mengen*

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x :\ x \in A \ \vee\ x \in B\} \\ A \cap B &:= \{x :\ x \in A \wedge\ x \in B\} \\ A \setminus B &:= \{x :\ x \in A \wedge \overbrace{x \notin B}^{\neg\,(x \in B)}\} \end{aligned}$$

0.5 Regeln *Seien A, B, C Mengen. Dann gilt*

(a) $A \cup B = B \cup A$

(b) $A \cap B = B \cap A$

(c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(e) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(f) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

0.6 Definition *Seien A, B Mengen.*

$$A \subset B \ :\Longleftrightarrow\ \forall_x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A = B \ :\Longleftrightarrow\ \forall_x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Beweis: 0.5(c) :
$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\Longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \cup C) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\Longleftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

Beweis von (a), (b), (c)–(f) analog, z.T. ÜA

Bemerkung: Ähnlich zeigt man

$A \cup A = A$,
$A \cap A = A$,
$A \cup \emptyset = A$ und
$A \cap \emptyset = \emptyset$,

die den allgemeingültigen Aussagen

$A \vee A \iff A$,
$A \wedge A \iff A$,
$A \vee f = A$ und
$A \wedge f = f$

entsprechen.

0.7 Folgerung *Seien A, B, C Mengen. Dann gilt*

(a)' $A \subset B \;\wedge\; B \subset A \iff A = B$

(b)' $A \subset B \;\wedge\; B \subset C \implies A \subset C$

Beweis: (a)
$$\begin{aligned} A = B \;&:\iff (\forall_x : x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ &\iff \big(\forall_x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow_x \in A)\big) \\ &\iff (\forall_x : x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall_x : x \in B \Rightarrow x \in A) \\ &\iff A \subset B \;\wedge\; B \subset A \end{aligned}$$

Auch die De Morgan-Regeln lassen sich auf Mengen übertragen.

0.8 Satz *Seien A, B, M Mengen. dann gilt*

(a) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

(b) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

(c) $M \setminus (M \setminus A) = A \cap M$

Die Korrespondenz zu den Formeln der Aussagenlogik tritt im Fall $A, B \subset M$ deutlich hervor.
In diesem Fall schreiben wir

$$C_M A := M \setminus A \qquad \text{bzw.} \qquad C_M B := M \setminus B$$

0.8' Satz *Seien A, B, M Mengen, $A \subset M$, $B \subset M$. Dann gilt*

(a)' $C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B$

(b)' $C_M(a \cap B) = C_M A \cup C_M B$

(c)' $C_M C_M A = A$

Beweis: (a)'
$$\begin{aligned} x \in M \setminus (A \cup B) &\iff x \in M \wedge \neg\,(x \in A \cup B) \\ &\iff x \in M \wedge \neg\,(x \in a \wedge x \in B) \\ &\iff x \in M \wedge \big(\neg\,(x \in A) \wedge \neg\,(x \in B)\big) \\ &\iff x \in M \wedge x \in M \wedge \big(\neg\,(x \in A) \wedge \neg\,(x \in B)\big) \\ &\iff x \in M \wedge \neg\,(x \in A) \wedge \big(x \in M \wedge \neg\,(x \in B)\big) \\ &\iff x \in M \setminus A \wedge x \in M \setminus B \\ &\iff x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B) \end{aligned}$$

0.9 Definition *Sei I eine nicht leere (Index)menge und A_i für jedes $i \in I$ eine Menge. Dann*

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x : \forall_{i\in I} : x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x : \exists_{i\in I} : x \in A_i\}$$

Bemerkung: (a) I kann unendlich viele Elemente besitzen.

(b) Falls $I = \{1, \dots, n\}$, dann $\bigcap\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n$ und $\bigcup\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n$

0.10 Regeln *Sei M eine Menge und I, A_i wie in 0.9. Dann gilt:*

(a) $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \cup M = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \cup M)$

(b) $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \cap M = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i \cap M)$

(c) $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \cap M = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \cap M)$

(d) $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \cup M = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i \cup M)$

(e) $M \setminus \bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I}(M \setminus A_i)$

(f) $M \setminus \bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I}(M \setminus A_i)$

Bemerkung: Für $I = \{1, 2\}$ ergibt sich wieder 0.5(c)–(f) und 0.8(a),(b).

Beweis von 0.10: (c)

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap M &\iff \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge x \in M \\ &\iff (\exists_{i\in I} : x \in A_i) \wedge x \in M \\ &\iff \exists_{i\in I} : x \in A_i \wedge x \in M \\ &\iff \exists_{i\in I} : x \in A_i \cap M \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(e)} \quad x \in M \setminus \bigcup_{i\in I} A_i &\iff x \in M \wedge x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \\
&\iff x \in M \wedge \neg \Big(x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Big) \\
&\iff x \in M \wedge \neg \left(\exists_{i\in I} : x \in A_i\right) \\
&\iff x \in M \wedge \forall_{i\in I} : \neg \left(x \in A_i\right) \\
&\iff x \in M \wedge \forall_{i\in I} : x \notin A_i \\
&\overset{(*)}{\iff} \forall_{i\in I} : x \in M \wedge x \notin A_i \\
&\iff \forall_{i\in I} : x \in M \setminus A_i \\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} (M \setminus A_i)
\end{aligned}$$

(a), (b), (d), (f) analog.

Zu $(*)$: Eingegangen sind die allgemein gültigen Regeln

$$\begin{aligned}
\forall_x : \big(A(x) \wedge B\big) &\iff \big(\forall_x : A(x)\big) \wedge B \\
\forall_x : \big(A(x) \vee B\big) &\iff \big(\forall_x : A(x)\big) \vee B \\
\exists_x : \big(A(x) \vee B\big) &\iff \big(\exists_x : A(x)\big) \vee B \\
\exists_x : \big(A(x) \wedge B\big) &\iff \big(\exists_x : A(x)\big) \wedge B
\end{aligned}$$

[Beweis der zweiten Regel:

„$\Longrightarrow$“ Sei $\forall_x : \big(A(x) \vee B\big)$ wahr.

1. Fall: $\big(\forall_x : A(x)\big)$ wahr. Dann ist $A(x) \vee B$ für jedes x wahr, d.h. $\forall_x : \big(A(x) \vee B\big)$ ist wahr.
2. Fall: $\big(\forall_x : A(x)\big)$ falsch Dann $\exists_x : A(x)$ falsch. Weil aber nach Voraussetzung $A(x) \vee B$ für all x wahr ist, muss B wahr sein.
   Also $\big(\forall_x : A(x)\big) \vee B$ wahr.

„$\Longleftarrow$“ Sei $\forall_x : \big(A(x) \vee B\big)$ wahr.

1. Fall: B wahr. Dann ist für jedes x $A(x) \vee B$ wahr, also $\forall_x : \big(A(x) \vee B\big)$ wahr.
2. Fall: B falsch. Dann muss $\forall_x : A(x)$ wahr sein, also ist für jedes x $A(x) \vee B$ wahr. Sonst ist $\forall_x : \big(A(x) \vee B\big)$ wahr.]

Kartesische Produkte

Seien A, B Mengen. $A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$
Dabei sind zwei Paare genau dann gleich, wenn die entsprechenden Elemente (Komponenten) gleich sind, d.h.

$$(a,b) = (a',b') \iff a = a' \wedge b = b'$$

Bemerkung: (a) Paare und Mengen sind verschieden, z.B. ist

$$(1,2) \neq (2,1) \qquad \text{, aber} \qquad \{1,2\} = \{2,1\}$$

(b) Paare lassen sich auf Mengen zurückführen, z.B. durch die Definition

$$(a, b) := \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

0.11 Definition *Seien $A_1, \ldots, A_k$ endlich viele Mengen ($k \geq 2$) Dann heißt*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k := \big\{(a_1, \ldots, a_k) : \forall_{i \in \{1,\ldots,k\}} : a_i \in A_i\big\}$$

das kartesische Produkt der Mengen $A_1, \ldots, A_k$.
Dabei sind zwei k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ und $(a'_1, \ldots a'_k)$ genau dann gleich, wenn die entsprechenden Komponenten gleich sind, d.h. wenn

$$a_1 = a'_1 \wedge a_2 = a'_2 \wedge \ldots \wedge a_k = a'_k$$

gilt.
Falls $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$, dann schreibt man $A^k := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k\text{-mal}}$ und setzt $A^1 := A$.

0.12 Definition

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad \text{(Sprechweise: „}n\text{ Fakultät“)}$$

$$0! = 1$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N} \quad \text{(Sprechweise: „}n\text{ über }k\text{“)}$$

$$\binom{n}{0} := 1 \text{ für } (n \in \mathbb{N}_0)$$

Bemerkung: (a) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \leq k \leq n)$

(b) $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.

0.13 Satz *Sei A eine Menge an n Elementen ($n \in \mathbb{N}$).(Schreibweise $|A| = n$)*
Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt

(a) $\left|A^k\right| = \left|\big\{(x_n, \ldots, x_k) : x_1, \ldots, x_k \in A\big\}\right| = n^k$

„k-Tupel aus Elementen von A“

(b) $\left|\big\{(x_1, \ldots, x_k) : x_1, \ldots, x_k \in A, \forall_{i \neq j} : x_i \neq x_j\big\}\right| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

„k-Tupel aus Elementen von A <u>ohne Wiederholung</u>“

(c) $\left|\big\{\{x_1, \ldots, x_k\} : x_1, \ldots, x_k \in A, \forall_{i \neq j} : x_i \neq x_j\big\}\right| = \binom{n}{k}$

„k-elementige Teilnemge von A“

Bemerkung: *Sei* $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $|A| = n$.

(a) Für die erste Komponente x_1 *gibt es* n *Möglichkeiten zur Auswahl, für die zweite ebenfalls usw., also insgesamt*

$$\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k$$

(b) Für die erste Komponente x_1 *gibt es* n *Möglichkeiten zur Auswahl. Weil die zweite Komponente von der ersten verschieden sein muss, gibt es für die zweite Komponente* $(n-1)$ *Möglichkeiten zur Auswahl. Da die dritte Komponente von den ersten beiden verschieden sein muss, gibt es für sie* $(n-2)$ *Möglichkeiten zur Auswahl usw.*
Somit gibt es $n(n-1)\dots\big(n-(k-1)\big)$ k*-Tupel ohne Wiederholung.*

(c) Zu jeder k*-elementigen Teilmenge* $\{x_1, \dots, x_k\}$ *von* A *gibt es genau* $k(k-1)\dots 1 = k!$ *verschiedene* k*-Tupel ohne Wiederholung aus* $x_1, \dots, x_k$*. Daher gilt*

$$\big(\text{Zahl der } k\text{-elementigen Teilmengen von } A\big) \cdot k! =$$

$$\underbrace{\big(\text{Zahl der } k\text{-Tupel ohne Wiederholung von } A\big)}_{n(n-1)\dots(n-k+1)}$$

(d) $|P(A)| = 2^n$*. Dabei berechnet* $\overbrace{P(A)}^{\text{„Potenzmenge“}}$ *die Menge aller Teilmengen von* A*.*

Beispiel: $A = \{1,2\}$ $\quad |A| = 2$
$P(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$
$|P(A)| = 4$

(e) Sei $x \neq y$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\Big|\{(z_1, \dots, z_n) \in \{x,y\}^n : \ \big|\{i : z_i = x\}\big| = k\}\Big| = \binom{n}{k}$$

„n Tupel aus x und y, bei denen x k-fach und y (n − k)-fach vorkommt“

Beweis: (d) Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Jeder Teilmenge A' entspricht genau ein n-Tupel $\chi(A') = (\chi_1, \dots, \chi_n)$.

$$\chi_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in A' \\ 0 & \text{falls } i \notin A' \end{cases}$$

Die Anzahl der n-Tupel aus $\{0,1\}$ ist gleich 2^n

$$\left|\{0,1\}^n\right| = 2^n$$

Daraus folgt die Behauptung.

(e) Jedem n-Tupel, in dem x k-fach und y $(n-k)$-fach vorkommt entspricht genau ein n-Tupel $\chi \in \{0,1\}^n$ mit k Einsen und $n-k$ Nullen.

Das wiederum korrespondiert nach dem Beweis zu (d) genau zu einer k-elementigen Teilmenge von A. Nach (c) ist deren Anzahl $\frac{n}{k}$.

Bemerkung:

(1) Bei (a) ist die Voraussetzung $k \leq n$ entbehrlich, (c) und (e) gelten auch für $k = 0$.

(2) Die im Beweis zu (d) benutzte Zuordnung von n-Tupel aus $0, 1$ zu Teilmengen von A ist Grundlage für die Darstellung von Mengen in Programmiersprachen. (Pascal: `set`, C++: `bitset<n>`)

(3) Aus (c) folgt, dass $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ auch mit Ganzzahlarithmetik über

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

berechnet werden kann.

0.14 Satz *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis: Für $k = n$ gilt: $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n-1}{n} = 0$, $\binom{n-1}{n-1} = 1$, also die Behauptung.

Für $1 \leq k \leq n-1$ folgt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!\big((n-1)-k\big)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Dieser Satz ermöglicht die Berechnung der Binomialkoeffizienten über das Pascalsche Dreieck.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\vdots\ \ \vdots \\
\binom{n-1}{0}\cdots\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}\cdots\binom{n-1}{n-1} \\
\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \ \cdots\ \ \binom{n}{k}\ \cdots\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Abbildungen

0.15 Definition *Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung oder Funktion von X nach Y (Schreibweise: $f : X \to Y$) ist eine Vorschrift, welche jedes $x \in X$ in eindeutiger Weise ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.*
X heißt Definitionsbereich oder Quelle und Y heißt Wertebereich oder Ziel von f.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $f(x) = x^2$
alternative Schreibweise: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto x^2$
Quelle und Ziel gehören zur Abbildung hinzu
$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = x^2$ ist (streng genommen) eine andere Abbildung.
Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt die Menge

$$\operatorname{graph}(f) := \big\{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\big\} \subset X \times Y$$

der Graph von f.

Beispiel:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
(b) Sei X eine Menge. Die Abbildung $\mathrm{id}_x : X \to X$, $x \mapsto x$ heißt Identität oder identische Abbildung auf X.
(c) Seien X, Y Mengen und $c \in Y$. Die Abbildung: $X \to Y$, $x \mapsto c$ heißt konstante Abbildung.
(d) Sei X eine Menge und $A \subset X$. Die Abbildung $\iota : A \to X$, $x \mapsto x$ heißt Einbettung oder Inklusion.
(e) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$. Die Abbildung $A \to Y$, $x \mapsto f(x)$ heißt Einschränkung (oder Restriktion) von f auf A und wird mit $f\,|_A$ bezeichnet.

Verkettung von Abbildungen

0.16 Definition *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann heißt die Abbildung*

$$x \to Z,\ x \mapsto g\big(f(x)\big)$$

Verkettung von g mit f und wird mit $g \circ f$ bezeichnet.

0.17 Satz *Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to$ und $h : Z \to W$ Abbildungen.*
Dann gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Beweis: Man sieht sofort, dass sowohl

$$(h \circ g) \circ f \qquad \text{als auch} \qquad h \circ (g \circ f)$$

Abbildungen mit Definitionsbereich X und Wertebereich W sind.
Sei $x \in X$.

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

$$= h\big((g \circ f)(x)\big) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$$

Bemerkung: Auch bei identischen Definitions- und Wertebereichen gilt im Allgemeinen

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1$
$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+1) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$
$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2+1) = (x^2+1) + 1 = x^2 + 2$

Beim schnellen Potenzieren wird ausgenutzt, dass die Berechnung von

$$x^{(2^n)} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{2^n\text{-mal}}$$

schneller ausgeführt werden kann, wenn man statt dessen n-mal quadriert

$$x^{(2^n)} = \left(\left(\left(x^2\right)^2\right)^2\right)^2 = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-mal}}(x) \qquad \text{mit} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$

0.18 Definition *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A \subset X$, $B \subset Y$*

(a) $f(A) = \big\{f(x) : x \in A\big\} = \big\{y \in Y : \exists_{x\in A} : f(x) = y\big\}$ *heißt Bild von A unter f.*

(b) *f heißt surjektiv, wenn $f(X) = Y$*

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ *ist nicht surjektiv*
$g : \mathbb{R}_+ \to R_+$, $x \mapsto x^2$ *ist surjektiv (ohne Beweis)*
$R_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

(c) $f^{-1}(B) := \big\{x \in X : f(x) = B\big\} = \big\{x \in X : \exists_{y\in B} : y = f(x)\big\}$ *heißt Urbild von B unter f.*

(d) *$f : X \to Y$ heißt injektiv, wenn* $\forall_{x_1,x_2\in X} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Beispiel: f ist nicht injektiv

$$\Big[\quad -1 \neq 1, \text{ aber } f(1) = f(-1) \quad\Big]$$

g ist injektiv

$$\Big[\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) = {x_1}^2 - {x_2}^2$$
$$= \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\neq 0}\underbrace{(x_1 + x_2)}_{>0} \neq 0 \Longrightarrow g(x_1) \neq g(x_2) \quad\Big]$$

0.19 Satz *Sei $X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ (Umkehrabbildung) mit $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_y$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_x$.*

Beweis:

1. Zeige die Existenz der Umkehrabbildung:
   Sei $y \in Y$. Wegen f surjektiv gibt es mindestens ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$.
   Behauptung: x ist zu y eindeutig bestimmt.
   Beweis: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$
   Kontraposition (d): $x_1 = x_2$
   Damit existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, d.h. $Y \to X$, $y \mapsto x$ ist eine Abbildung (Bez: g)
   $\big(f \circ g\big)(y) = f\big(g(y)\big) = f(x) = y \quad (y \in Y),\quad$ d. h. $f \circ g = \mathrm{id}_y$
   $\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = x \quad (x \in X),\quad$ d. h. $g \circ f = \mathrm{id}_x$
2. Zeige die Eindeutigkeit der Umkehrfunktion
   Seien g_1, g_2 Abbildungen von Y nach X mit
   $g_1 \circ f = \mathrm{id}_x \qquad g_2 \circ f = \mathrm{id}_x$
   $f \circ g_1 = \mathrm{id}_y \qquad f \circ g_2 = \mathrm{id}_y$
   daraus folgt:
   $g_1(x) = g_1\big(f(x)\big) = \big(g_1 \circ f\big)(x) = x = \big(g_2 \circ f\big)(x) = g_2(y) \qquad (y \in Y)$

Beispiel: Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$
Ansatz für Umkehrabbildung ($f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$):
$y = ax + b$
$\frac{y-b}{a} = x$, d. h. Vermutung: $f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$

$x, y \in \mathbb{R}$
$\big(f \circ f^{-1}\big)(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = f\big(\frac{y-b}{a}\big) = a \cdot \big(\frac{y-b}{a}\big) + b = y$
$\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(ax + b) = \frac{ax+b-b}{a} = x$

0.20 Satz *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Beweis:

1. Zeige $g \circ f$ ist injektiv.
   f injektiv: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) \neq g\big(f(x_2)\big)$
   g injektiv: $y_1 \neq y_2 \Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2) \Rightarrow \big(g \circ f\big)(x_y) \neq \big(g \circ f\big)(x_1)$
2. Zeige $g \circ f$ ist surjektiv.
   $$\begin{array}{crcl} f \text{ surjektiv, also} & f(X) & = & Y \\ g \text{ surjektiv, also} & g(Y) & = & Z \\ \text{somit} & g\big(f(X)\big) & = & Z \\ \text{d. h.} & \big(g \circ f\big)(x) & = & Z \end{array}$$
3. Zeige $f^{-1} \circ g^{-1}$ ist Umkehrabbildung.
   ...

§ 1. Reelle Zahlen

Wir setzen die reellen Zahlen als gegeben voraus und formulieren einige Grundannahmen (Axiome), von denen die weiteren Eigenschaften abgeleitet werden. Diese lassen sich in die drei Gruppen Körperaxiome, Anordnungsaxiome und Vollständigkeitsaxiome gliedern.

Körperaxiome

Auf der Menge $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen gegeben

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \leftrightarrow x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \leftrightarrow x \cdot y \qquad \text{Schreibweise oft nur } xy,$$

die folgende Regeln (Axiome) erfüllen

(K1) *Assoziativgesetze*

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} : \quad \begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z), \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

(K2) *Kommutativgesetze*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} : \quad \begin{aligned} x + y &= y + x, \\ x\dot{y} &= y \cdot x \end{aligned}$$

(K3) *Existenz und Eindeutigkeit der neutralen Elemente* 0 *und* 1, $0 \neq 1$ *mit*

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} : \quad \begin{aligned} x + 0 &= x, \\ x \cdot 1 &= x \end{aligned}$$

(K4) *Existenz und Eindeutigkeit der inversen Elemente*

$$\begin{aligned} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{1\ y\in\mathbb{R}} : \quad x + y &= 0 \\ \forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ \exists_{1\ y\in\mathbb{R}} : \quad x \cdot y &= 1 \qquad \text{Bez.: } x^{-1} \end{aligned}$$

(K5) *Distributivgesetz*

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} : \quad \begin{aligned} (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z, \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \end{aligned}$$

Bemerkung: In (K3) und (K4) kann auf die Eindeutigkeit als Forderung verzichtet werden (lineare Algebra).

Mit Hilfe von (K4) lassen sich Subtraktion und Division erklären.

1.1 Definition *Seien* $x, y \in \mathbb{R}$

$$x - y := x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1} \qquad \text{, sofern } y \neq 0$$

$\neg\exists_x : A(x) \iff \forall_x : \neg A(x)$
Das überträgt sich nicht auf $\exists_1$.

1.2 Rechenregeln *Seien* $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

(a) $-(-x) = x, \ \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (x \neq 0)$

(b) $-(x+y) = -x - y$

(c) $x \cdot y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$

(d) $(-1) \cdot x = -x$

$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

(e) $\frac{u}{x} \pm \frac{v}{y} = \frac{uy \pm vx}{xy} \quad (x \neq 0, \ y \neq 0)$

$\frac{u}{x} \cdot \frac{v}{y} = \frac{uv}{xy} \quad (x, y \neq 0)$

$\frac{\frac{u}{x}}{\frac{v}{y}} = \frac{uy}{vx} \quad (x, y, v \neq 0)$

Beweis: (a) $(-x) + x \overset{\text{K4}}{=} x + (-x) \overset{\text{K4}}{=} 0$

$(-x) + \big(-(-x)\big) \overset{\text{K4}}{=} 0$

Aus der Eindeutigkeit des inversen Elements folgt $x = -(-x)$

Zweite Aussage analog.

(b)

$$\begin{aligned} x + y + (-x \underbrace{-y}_{+(-y)}) &\overset{\text{K2}}{=} x + (-x) + y + (-y) \\ &\overset{\text{K4}}{=} 0 + 0 \overset{\text{K3}}{=} 0 \\ x + y + \big(-(x+y)\big) &\overset{\text{K4}}{=} 0 \end{aligned}$$

(c) „$\Leftarrow$“ $x \cdot 0 + x \cdot 0 \overset{\text{K5}}{=} x \cdot (\underbrace{0+0}_{0 \text{ wg. (K3)}}) = x \cdot 0$

$x \cdot 0 + 0 \overset{\text{K3}}{=} x \cdot 0$

Wegen der Eindeutigkeit des neutralen Elements folgt $x \cdot 0 = 0$.

„⇒“ Sei $x \cdot y = 0$. Fall $y \neq 0$, dann

$$x = x \cdot \big(y \cdot \frac{1}{y}\big) \overset{\text{K1}}{=} (x \cdot y) \cdot \frac{1}{y} \overset{\text{Voraus.}}{=} 0 \cdot \big(\frac{1}{y}\big) \overset{\text{„}\Leftarrow\text{“}}{=} 0$$

(“⇐“ ist bereits bewiesen.)

(d) $x + (-1) \cdot x \overset{\text{K3}}{=} 1 \cdot x + (-1) \cdot x \overset{\text{K5}}{=} \big(1 + (-1)\big) \cdot x \overset{\text{K4}}{=} 0 \cdot x \overset{(c)}{=} 0$

$x + (-x) \overset{\text{K4}}{=} 0$

Wegen der Eindeutigkeit des inversen Elements folgt $-x = (-1) \cdot x$

1.3 Summen-, Produkt- und Potenzschreibweise

(a) *Durch wiederholte Anwendung des Assoziativgesetzes sieht man, dass in der Summe $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ die Klammern beliebig gesetzt werden können, weshalb sie oft weggelassen werden.*

Schreibweise:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i := x_1 + x_2 + \cdots x_n \ (n \in \mathbb{N}), \ \sum_{i=1}^{0} x_i := 0 \qquad \textit{(leere Summe)}$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i := x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \ (n \in \mathbb{N}), \ \prod_{i=1}^{0} x_i := 1 \qquad \textit{(leeres Produkt)}$$

$$x^n := \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}} = \prod_{i=1}^{n} x \ (n \in \mathbb{N}),$$

Verallgemeinerung:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := \begin{cases} x_m + x_{m+1} + \ldots x_n & (m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n) \\ 0 & (m, n \in \mathbb{Z}, m > n) \end{cases}$$

$$\prod_{i=m}^{n} x_i := \begin{cases} x_m \cdot x_m + 1 \cdot \ldots \cdot x_n & (m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n) \\ 1 & (m, n \in \mathbb{Z}, m > n) \end{cases}$$

Folgerung:

$$\sum_{i=\ell}^{n} x_i = \Big(\sum_{i=\ell}^{m} x_i\Big) + \Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_i\Big) \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}, l \leq m \leq n) \tag{1}$$

$$\prod_{i=\ell}^{n} x_i = \Big(\prod_{i=\ell}^{m} x_i\Big) \cdot \Big(\prod_{i=m+1}^{n} x_i\Big) \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}, l \leq m \leq n) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^{m+n} && (m, n \in \mathbb{N}_0) \\ \big(x^m\big)^n &= x^{m \cdot n} && (m, n \in \mathbb{N} \ \textit{bzw.} \ m, n \in \mathbb{N}_0, \ x \neq 0) \\ (x \cdot y)^n &= x^n \cdot y^n && (n \in \mathbb{N} \ \textit{bzw.} \ n \in \mathbb{N}_0, \ x \neq 0, \ y \neq 0) \end{aligned} \tag{3}$$

(b) *Wiederholte Anwendung des Kommunikativgesetzes liefert für jeder Bijektion* $\varphi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{\varphi(i)} \tag{4}$$

was auch gerne als $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{k_i}$ *geschrieben wird.*
$\big(x_1 + \dots + x_n = x_{k_i} + \dots + x_{k_n}, k_i := \varphi(i)\big)$

Beispiel: $\varphi(i) = n + 1 - i$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{n+1-i} \tag{5}$$

Verallgemeinerung: $\varphi : \{m', \dots, n'\} \to \{m, \dots n\}$ *bijektiv*

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{i=m'}^{n'} x_{\varphi(i)} \tag{6}$$

Beispiel: $\left\{{}^{\varphi:\{0,\dots,n-1\}\to\{1,\dots,n\}}\right\}$, $\varphi(i) = i + 1$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \qquad \textit{Indexverschiebung} \tag{7}$$

Eine weitere Anwendung des Kommutativgesetztes liefert

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \tag{8}$$

Verallgemeinerung:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right) \tag{9}$$

(c) *Wiederholte Anwendung des Distributivgesetzes führt auf*

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot x_i) \tag{10}$$

Verallgemeinerung:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{j=i}^{n} y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} (x_i y_j)\right) \overset{(9)}{=} \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} (x_i y_j)\right) \tag{11}$$

Beweis: $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right) \overset{(10)}{=} \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda x_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\right) x_i\right) \overset{(10)}{=} \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} (x_i y_j)\right)$

Bemerkung: In der Rechnergleitpunktarithmetik gelten Assoziativ- und Distributivgesetze im Allgemeinen nicht: $x \oplus y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rundung}}}{\text{rd}}\ (x+y)$, analog für $\ominus, \odot, \oslash$

Es gibt Maschinenzahlen $\delta \neq 0$ so dass $1 \oplus \delta = 1$

$(\delta \oplus 1) \ominus 1 = 1 \ominus 1 = 0$

$\delta \ominus (\underbrace{1 \ominus 1}_{0}) = \delta \neq 0$

1.4 Binomischer Satz *Sei $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis: Multipliziert man $(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)}_{n\text{-fach}}$ aus, ohne das Kommutativgesetz zu verwenden, so erhält man 2^n Summanden der Gestalt $z_1 \cdot \cdots \cdot \ldots \cdot z_n$ mit $z_i \in \{x, y\}$.

Jedem derartigen Summanden entspricht genau ein n-Tupel $(z_1, \ldots, z_n) \in \{x, y\}^n$.

Nach 0.13(e) gibt es genau $\binom{n}{k}$ n-Tupel, in denen x k-fach und y $(n-k)$-fach vorkommt, also gibt es unter Anwendung des Kommutativgesetzes $\binom{n}{k}$ Summanden, die sich al $x^k y^{n-k}$ screiben lassen.

Somit $(x+y)^n = \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} x^n y^0 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

1.5 Geometrische Summenformel

(a) Sei $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. dann gilt:

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Beispiel: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Beweis: $(x-y)\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(x-y)x^{n-1-k}y^k$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\underbrace{x^{n-k}y^k}_{a_k:=} - \underbrace{x^{n-1-k}y^{k+1}}_{a_{k+1}}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= a_0 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n\right)$$

$$= a_0 - a_n = x^{n-0}y^0 - x^{n-n}y^{n-0} = x^n - y^n$$

1.6 Definition *Sei $n\in\mathbb{N}_0$, $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Die Funktion $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ wird als Polynom bezeichnet. Ist $a_n\neq 0$, so heißt n Grad des Polynoms (Bez.: $\operatorname{grad} p$) und a_n Höchstkoeffizient.*

$\xi\in\mathbb{R}$ heißt Nullstelle von p, wenn $p(\xi)=0$

Bemerkung: Das Nullpolynom, definiert durch $p(x):=0$ $(x\in\mathbb{R})$, zählt zu den Polynomen, besitzt aber keinen Grad.

1.7 Satz

(a) Jedes Polynom von Grad n lässt sich schreiben als

$$p(x) = (x-\xi_1)^{m_1}\dots(x-\xi_\ell)^{m_\ell}\cdot q(x) = \left(\prod_{i=1}^{\ell}(x-\xi_i)^{m_i}\right)\cdot q(x)$$

mit $\ell\in\mathbb{N}_0$, $m_1,\dots,m_\ell\in\mathbb{N}$, $\xi_1,\dots,\xi_\ell\in\mathbb{R}$ und $q(x)\neq 0$ $(x\in\mathbb{R})$.

Außerdem gilt $m_1+\dots m_\ell+\operatorname{grad} q=\operatorname{grad} p$.

(b) Jedes Polynom von Grad n besitzt höchstens n Nullstellen.

(c) Falls zwei Polynome $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ an $n+1$ Stellen übereinstimmen, dann $a_k=b_k$ für alle $k=0,\dots,n$.

Beweisskizzen: (a) Falls p keine Nullstelle besitzt, dann gilt der Satz mit $\ell=0$ und $q=p$.

Falls p eine Nullstelle $\xi\in\mathbb{R}$ besitzt, dann folgt

$$p(x) - \underbrace{p(\xi)}_{0} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \big(x^k - \xi^k\big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \big(x^k - \xi^k\big) \overset{1.5(a)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^i \cdot \xi^{k-1-i}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{a_k x^i \xi^{k-1-i}}_{\alpha_{ik}}$$

	$\mathbf{k=1}$	$\mathbf{k=2}$	$\dots$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{k=n}$
$\mathbf{i=0}$	α_{01}	α_{02}		α_{0k}	α_{0n}
$\mathbf{i=1}$		α_{12}		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$				$\alpha_{k-1\,k}$	$\vdots$
$\mathbf{i=n-1}$					$\alpha_{n-1\,n}$

Statt das Tableau zuerst spaltenweise zu summieren, wird es jetzt zeilenweise summiert

$$= (x-\xi) \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{a_k \cdot x^i \xi^{k-1-i}}_{\alpha_{ik}}$$
$$= (x-\xi) \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{k=i+1}^{n} a_k \xi^{k-1-i} \right)}_{b_k :=} x^i$$

Wegen $b_{n-1} = \sum_{k=n-1+1}^{n} a_k \xi^{k-1-(n-1)} = a_n \neq 0$ ist $\sum_{n=0}^{n-1} b_i x^i$ ein Polynom vom Grad $n-1$.

Wir haben gezeigt, dass $p(x) = (x-\xi) \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i}_{\text{Grad } (n-1)}$.

Wende dasselbe Argument auf $\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ an usw.

(b) Klar nach (a).

(c) Betrachte $r(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(a_k - b_k\big) x^k$. Dann hat r $n+1$ Nullstellen.

Zeige: $a_k - b_k = 0$ $(b = 0, \dots, n)$

Falls für ein k $a_k \neq b_k$ gilt, dann ist r nicht das Nullpolynom und besitzt einen Grad $\leq n$. Nach (b) hat r höchstens n Nullstellen. Widerspruch!

Anordnungsaxiome

Bestimmte Elemente von $\mathbb{R}$ werden als positiv bezeichnet (Bez.: $x > 0$). Wir setzen folgende Axiome voraus:

(A1) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:* $x > 0$, $x = 0$, $-x > 0$

(A2) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}} : x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$

(A3) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}} : x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

1.8 Definition *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir setzen*

$$\begin{aligned} x > y &\quad :\Longleftrightarrow \quad x - y > 0 \quad (x \textit{ größer } y) \\ y \geq y &\quad :\Longleftrightarrow \quad x > y \vee x = y \\ x < y &\quad :\Longleftrightarrow \quad y > y \\ x \leq y &\quad :\Longleftrightarrow \quad y \geq x \end{aligned}$$

1.9 Rechenregeln (Auszug) *Seien $x, y, z, a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) $x > y \wedge x > z \Longrightarrow x > z$

(b) $$\begin{aligned} x > y &\iff x + a > y + a \\ &\iff x - a > y - a \end{aligned}$$

(c) $x > y \wedge a > 0 \Longrightarrow a \cdot x > a \cdot y$

$x > y \wedge a < 0 \Longrightarrow a \cdot x < a \cdot y$

(d) $x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$ *(insbesondere $1 > 0$)*

(e) $x > y > 0 \Longrightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x} > 0$

Beweis: (a) Sei $x > y$ und $y > z$. Dann $x - y > 0$ und $y - z > 0$, also nach (A2) $\underbrace{(x - y) + (y - z)}_{x-z} > 0$ d. h. $x > z$.

(b) Trivial: $x > y \Leftrightarrow x - y > 0 \Leftrightarrow (x + a) - (y + a) > 0 \Leftrightarrow x + a > y + a$

(c) Sei $x > y$ und $a > 0$. Dann $x - y > 0$ und $a > 0$, also nach (A3) $a(x - y) > 0$, d. h. nach (K5) $ax - ay > 0$, somit $ax > ay$.

Sei $x > y$ und $a < 0$. Dann $(-a) > 0$ und $x > y$, also nach dem soeben bewiesenen

$$\begin{aligned} \underbrace{(-a)x}_{} &> (-a)y \\ -ax &> -ay, \end{aligned}$$

Nach b) folgt

$$-ax + ax + ay > -ay + ax + ay$$

d.h.

$$ay > ax$$

bzw.

$$ax < ay$$

(d) 1.F.: $x > 0$. Nach (A2) $x \cdot x > 0$
2.F.: $x < 0$. Dann $(-x) > 0$, also nach dem 1.F. $\underbrace{(-x)(-x)}_{\substack{x \cdot x \text{ nach} \\ 1.3(\text{d})}} > 0$

(e) **Vorbemerkung:** Sei $x > 0$. Dann $\frac{1}{x} = x \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^2}_{> 0 \text{ nach (d)}} > 0$.

Sei $x > y > 0$. Nach (A3) folgt $x \cdot y > 0$. Nach der Vorbemerkung $\frac{1}{xy} > 0$
Somit folgt aus $x > y$ nach (c) $x \cdot \frac{1}{xy} > y \cdot \frac{1}{xy}$, d. h. $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$ (Vorb. > 0)

1.10 Definition *Sei $x \in \mathbb{R}$.*
Setze $|x| := \begin{cases} x & \textit{falls } x \geq 0 \\ -x & \textit{falls } x < 0 \end{cases}$

1.11 Folgerung *Sei $x \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$. Dann gilt*

(a) $|x| \geq 0, \quad |-x| = |x>, \quad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(b) $|x| \leq M \Longleftrightarrow -M \leq x \leq M$
$|x| < M \Longleftrightarrow -M < x < M$
$-|x| \leq x \leq |x|$

(c) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

Beweis: (a) $|x| \geq 0$ klar, ebenso $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$|-x| = \begin{cases} -x & \text{falls } -x > 0 \\ 0 & \text{falls } -x = 0 \\ x & \text{falls } -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 = |x| \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

(b) Zeige erste Aussage:

$$\text{„}\Longrightarrow\text{“}\quad |x| \le M \left\{\begin{array}{ll} x \ge 0 & \text{Dann } 0 \le x = |x| \le M \\ x < 0 & \text{Dann } 0 < -x = |x| \le M \\ & \qquad \text{bzw. } -M \le x < 0 \end{array}\right\} -M \le x \le M$$

$$\text{„}\Longleftarrow\text{“}\quad -M \le |x| \le M \left\{\begin{array}{ll} x \ge 0 & \text{Dann } |x| = x \le M \\ x < 0 & \text{Dann } |x| = -x \\ & \qquad \le -(-M) = M \end{array}\right\} |x| \le M$$

Zweite Aussage analog

Dritte Aussage folgt aus der ersten Aussage mit $M = |x|$

(c) 1. Fall: $x \ge 0$, $y \ge 0$:

$$\left.\begin{array}{l} |\underbrace{xy}_{\ge 0}| = xy \\ |x| = x \\ |y| = y \end{array}\right\} |xy| = |x| \cdot |y|$$

2. Fall: $x < 0$, $y \ge 0$:

$$\left.\begin{array}{l} |\underbrace{xy}_{\le 0}| = -(xy) \\ |x| = -x \\ |y| = y \end{array}\right\} |xy| = |x| \cdot |y|$$

3. Fall $x \ge 0$, $y < 0$ und 4. Fall $x < 0$, $y < 0$ analog

(d) $$x = \frac{x}{y} \cdot y \quad \overset{(c)}{\Longrightarrow} \quad |x| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y| \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

1.12 Dreiecksungleichung *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) $|x+y| \le |x| + |y|$

(b) $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$

Beweis: (a) $-\big(|x| + |y|\big) = -|x| + \big(-|y|\big) \overset{1.11b}{\le} x + y \overset{1.11b}{\le} |x| + |y|$

Also nach 1.11b $|x+y| \le |x| + |y|$

(b) Wir zeigen: $-|x-y| \le |x| - |y| \le |x-y|$

Die linke Ungleichung folgt aus

$$|y| = |y - x + x| \overset{(a)}{\le} |y - x| + |x| = |x| + |x - y|$$

und die rechte Ungleichung ergibt sich aus

$$|x| = |x - y + y| \overset{(a)}{\le} |x - y| + |y|$$

Ganze Zahlen nach vollständiger Induktion

Die vollständige Induktion ist eine Beweistheorie:
Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ ($n_0 \in Z$ fest) sei eine Aussage $A(n)$ gegeben.
Die Aussage: $\forall_{n\in\mathbb{Z},\ n\geq n_0} : A(n)$ ist wahr, wenn gezeigt wird:

Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist wahr

Induktionsschluss: $\forall_{n\in\mathbb{Z},\ n\geq n_0} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr

(Der Induktionsschluss kann bewiesen werden, indem vorausgesetzt wird, dass $A(n)$ wahr ist (Induktionsannahme) und damit die Wahrheit von $A(n+1)$ gezeigt wird).

1.13 Bernoullische Ungleichung *Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_0$.*
Dann gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: Vollständige Induktion.

$A(0) : 1 \geq 1$ wahr

$A(n) \Longrightarrow A(n+1)$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (\underbrace{1+x}_{\geq 0}) \overset{\text{Ind.annahme}}{\geq} (1+nx)\cdot(1+x) \\ &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

Variante der vollständigen Induktion:

Die Aussage $\forall_{n\in\mathbb{Z},\ n\geq n_0} : A(n)$ ist wahr, wenn gezeigt wird

Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist wahr

Induktionsschluss: $\forall_{n\in\mathbb{Z},\ n\geq n_0} : A(n_0) \wedge A(n_0+1) \wedge \ldots \wedge A(n) \Longrightarrow A(n+1)$

1.14 Potenzsummen *Sei $k \in \mathbb{N}_0$.*
Dann ist $s_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$s_k(x) = \sum_{i=1}^{n} i^k$$

ein Polynom (in n) vom Grad $k+1$ und es gilt

$$(*) \quad s_k(n) = \frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} s_j(n)\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Beispiel: $s_0(n) = \frac{1}{1}\big((n+1^n)-1\big) = n$

$\sum\limits_{i=0}^{n} i^0 = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = n$

$s_1(n) = \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - 1 - \underbrace{\sum\limits_{j=0}^{0}\binom{2}{j}s_k(n)}_{\binom{2}{0}\underbrace{s_0(n)}_{n}}\right) = \frac{1}{2}(n^2+2n+1-1-n) = \frac{1}{2}(n^2+n) =$

$\frac{n(n+1)}{2}$ Polynom 2. Grades (in n)

Beweis: (*): ÜA

Wir betrachten die Aussage

$A(k)$: s_a ist ein Polynom vom Grad $k+1$

$A(0)$:s_0 ist ein Polynom vom Grad 1 wg. $s_0(n) = n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Induktionsschluss: $A(0) \wedge A(1) \wedge \ldots \wedge A(k) \Longrightarrow A(k+1)$:

Nach (*) ergibt sich

$$s_{k+1}(n) = \frac{1}{k+2}\left(\underbrace{(n+1)^{k+2}}_{\substack{\text{Polynom vom Grad}\\ k+2 \text{ nach dem binom.}\\ \text{Satz}}} - 1 - \sum_{j=0}^{k}\binom{k+2}{j}\underbrace{s_j(n)}_{\substack{\text{Polynom vom Grad}\\ j+1\le k+1 \text{ nach}\\ \text{Ind.voraussetzung } A(j)}}\right)$$

Rekursive Definition

Dabei ist $x_{n_0} \in X$ ($n_0 \in \mathbb{Z}$ fest, X Menge) und eine Vorschrift, wie sich x_n aus $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n-1}$ erhalten lässt, gegeben.

Formaler: Sei X eine Menge, $n_0 \in \mathbb{Z}$ und für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Abbildung $f_n : x^{n-n_0+1} \to X$ gegeben.

Durch

$$x_{n_0} \in X$$

und

$$\forall_{n\in\mathbb{Z},\ n\geq n_0} : x_{n+1} = f_n(x_{n_0}, \ldots, x_n)$$

wird eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0}$ eindeutig definiert.

Beispiel: (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$,

$$x_0 = 0$$

$$x_{n+1} = a \cdot x_n + b \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$\Big[$ $x_0 = 0,\ x_1 = b,\ x_2 = a \cdot b + b = (a+1) \cdot b,$
$x_3 = a \cdot \big((a+1) \cdot b\big) + b = (a^2 + a + 1) \cdot b, \ldots$ $\Big]$

Vermutung: $x_n = (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1) \cdot b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geom.} \\ \text{Summenformel}}}{=} \frac{a^n - 1}{a-1} \cdot b$

Beweis durch vollständige Induktion:

$$A(0) : x_0 = \frac{a^0 - 1}{a - 1} \cdot b = 0$$

$$A(n) \Longrightarrow A(n+1) :$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a x_n + b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ind. von } A(n)}}{=} a \cdot \tfrac{a^n - 1}{a-1} \cdot b + b \\ &= \tfrac{(a^{n+1} - a^n) \cdot b + (a-1) \cdot b}{a-1} = \tfrac{a^{n+1} - 1}{a-1} \cdot b \end{aligned}$$

(b) $x_0 = 1$, $x_1 = 1$
$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$
Fibonacci-Folge: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$\Big[$ $x = \mathbb{R},\ f_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ f_n(x_0, \ldots, x_n) = x - n + x_{n-1},$
$f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_0(x_0) = 1$ $\Big]$

(c) $x_0 = 1$, $x_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} x_i$ (Bernoulli-Zahlen)

$$x_1 = -\frac{1}{2} \underbrace{\binom{2}{0}}_{1} \underbrace{x_0}_{1} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}\left(\underbrace{\binom{3}{0} x_0}_{1} + \underbrace{\binom{3}{1}}_{3} \cdot \underbrace{x_1}_{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{6}$$

Tabelle der Bernoulli-Zahlen

j	0	1	2	3	4	5	6
B_j	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$

Formel für die Potenzsumme (mit Hilfe der Bernoulli-Zahlen)

$$s_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{k} B_j \binom{k+1}{j} (n+1)^{k+1-j}$$

(Ohne Beweis, obwohl mit den bisherigen Mitteln beweisbar)

Anordnungsaxiome (Fortsetzung)

(A4) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \ \exists_{n \in \mathbb{N}} : n > x$

1.15 Folgerung *Es gilt:*

(a) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{1\, z \in \mathbb{Z}} : z \leq x < z + 1$

(b) $\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0} \ \exists_{n \in \mathbb{N}} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Dann

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n \in \mathbb{N}} : \alpha \cdot \frac{1}{2^n} \leq \alpha \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Bemerkungen:

1. Das nach (a) eindeutig bestimmte $z \in \mathbb{Z}$ wird mit $[x]$ („Gaußklammer von x“) bezeichnet.
2. In `C` wird $[x]$ durch `floor(x)` dargestellt, allerdings hat `floor` als Ergebnistyp einen Gleitpunkttyp (real).
3. Aus (b) folgt später $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beweis: (a) Existenz.

Sei $x \in \mathbb{R}$.

1. Fall: $x \in \mathbb{Z}$: $z := x$ erfüllt $z \in \mathbb{Z}$ und $z \leq x < z + 1$

2. Fall: $x \notin \mathbb{Z}, x > 0$:

Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$. Nach (A4) gilt $M \neq \emptyset$. Wir bezeichnen mit m das kleinste Element von M.

[Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.]

Behauptung: $m - 1 \leq x < m$

$x < m$ gilt, weil $m \in M$.

$m - 1 < x$ ist äquivalent zu $m - x < 1$.

Annahme: $m - x \geq 1$

Dann $m - 1 - x \geq 0$, daraus folgt wg. $x \notin \mathbb{Z}$, dass $m - 1 > x$. Hieraus $m - 1 \in M$, d. h. m ist nicht das kleinste Element von M.

Widerspruch!

Sonst erfüllt $z := m + 1$, $z \in \mathbb{Z}$ und $z \leq x < z + 1$.

3. Fall: $x \notin \mathbb{Z}$, $x < 0$. Nach dem 2. Fall gibt es $\tilde{z} \in \mathbb{Z}$ $\quad \tilde{z} \leq \underbrace{(-x)}_{>0} < \tilde{z} + 1$

Hieraus folgt $-\tilde{z} - 1 < x < -\tilde{z}$
Wähle $z := -\tilde{z} - 1$.
Eindeutigkeit: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$z_1 \leq x < z_1 + 1 \qquad \text{und} \qquad z_2 \leq x < z_2 + 1$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} z_2 - x \leq 0,\ x - z_1 < 1 \implies z_2 - z_1 < 1 \\ z_1 - x \leq 0,\ x - z_2 < 1 \implies z_1 - z_2 < 1 \end{array}\right\} |z_1 - z_2| < 1$$

$$\stackrel{z_1, z_2 \in \mathbb{Z}}{\implies} z_1 = z_2$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Nach (A4) existiert zu $x := \frac{1}{\varepsilon}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$, d. h. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Zu $x := \frac{\alpha}{\varepsilon}$ existiert nach (A4) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{\alpha}{\varepsilon}$, d. h. $\frac{\alpha}{n} < \varepsilon$.
Nach der Bernoulli-Ungleichung gilt

$$2^n = (1+1)^n \geq 1 + n$$

Also

$$\frac{\alpha}{2^n} \leq \frac{\alpha}{n+1} < \frac{\alpha}{n} < \varepsilon.$$

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ bezeichnen

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ „abgeschlossenes beschränktes Intervall"
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ } „halboffenes beschränktes Intervall"
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ „offenes beschränktes Intervall"

Sei $I := [a, b]$, $|I| := b - a$ heißt Länge von I.
(Die Mengen $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ und $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ heißen ebenfalls (abgeschlossene) Intervalle. Entsprechend werden $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ und $\{x \in \mathbb{R} : a > x\}$ als offene Intervalle bezeichnet.)

1.16 Definition *Seien $I_n \subset \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ jeweils abgeschlossene beschränkte Intervalle. Diese bilden eine Intervallschachtelung, wenn*

(i) $\forall_{n \in \mathbb{N}} : I_{n+1} \subset I_n$

(ii) $\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{n \in \mathbb{N}} : |I_n| < \varepsilon$

Beispiele:

1. $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$ bildet eine Intervallschachtelung $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$.
2. Intervalle I_n, die (i) erfüllen und $|I_n| \leq \frac{\alpha}{2^n}$($\alpha > 0$ fest), bilden wg. 1.15(c) eine Intervallschachtelung

Vollständigkeitsaxiom

(V1) *Für jede Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gilt*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset, \quad \textit{d. h. } \exists_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}} : x \in I_n.$$

Bemerkung: x ist eindeutig bestimmt.
Sei $\tilde{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Annahme: $x \neq \tilde{x}$
Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}|x - \tilde{x}|$ und wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon$
$x, \tilde{x} \in I_n$ (wg. $x, \tilde{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$). Also $|x - \tilde{x}| \leq |I_n| < \varepsilon = \frac{1}{2}|x - \tilde{x}|$.
Also $\frac{1}{2}|x - \tilde{x}| < 0$. Widerspruch!

1.17 Definition (lipschitzstetige Funktion) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstante $L > 0$, wenn gilt*

$$\forall_{x_1,x_2\in I} : \big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leq L|x_1 - x_2|$$

(kürzer: $\exists_{L>0}\ \forall_{x_1,x_2\in I} : \big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leq L|x_1 - x_2|$)

Beispiele:

(a) $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) ist lipschitzstetig (mit $L = 1$)
$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| = |x_1 - x_2|$

(b) $f(x) = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) ist lipschitzstetig (mit $L = 1$) wg.
$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| = \big||x_1| - |x_2|\big| \underset{1.12\text{b}}{\leq} |x_1 - x_2|$

(c) $f(x) = x^2$ ist lipschitzstetig auf beschränkten Intervallen $[a, b]$.
$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| = \big|{x_1}^2 - {x_2}^2\big| = \big|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\big|$
$\leq |x_1 - x_2| \cdot \big(\underbrace{|x_1|}_{\leq \max(|a|,|b|)} + |x_2|\big) \leq 2\max\big(|a|, |b|\big) \cdot |x_1 - x_2|$
$f(x) = x^2$ ist allerdings <u>nicht</u> lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ ist <u>nicht</u> lipschitzstetig.
Wähle $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = -\frac{1}{n}$

$$\frac{|f(\frac{1}{n}) - f(-\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n} - (-\frac{1}{n})} = \frac{|1 - (-1)|}{|\frac{1}{n} - (-\frac{1}{n})|} = \frac{2}{\frac{2}{n}} = n$$

(Wäre f lipschitzstetig, so gäbe es ein $L > 0$ mit
$\forall_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} : \left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \leq L$).

1.18 Zwischenwertsatz (vorläufige Fassung) *Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ sei lipschitzstetig, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (oder umgekehrt $f(a) > 0$, $f(b) < 0$). Dann gibt es ein $x \in I$, so dass $f(x) = 0$.*

Beweis: Sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit (andernfalls: ersetze f durch $-f$)

Idee: durch fortgesetzte Halbierung von $[a, b]$ Intervalle $[a_n, b_n]$ zu konstruieren mit $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) > 0$.

Rekursive Definition der Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$.

$I_0 := [a_0, b_0]$ mit $a_0 := a$, $b_0 := b$ erfüllt $f(a_0) \leq 0$, $f(b_0) > 0$.

$I_n := [a_n, b_n]$ mit $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) > 0$ sei bereits konstruiert.

$c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$ (Mittelpunkt von I_n)

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, c_n] & \text{falls } f(c_n) > 0 \\ [c_n, b_n] & \text{falls } f(c_n) \leq 0 \end{cases}$$

Dann gilt: $I_{n+1} \subset I_n$, $|I_{n+1}| - \frac{1}{2}|I_n|$ und $f(a_{n+1}) \leq 0$, $f(b_{n+1}) > 0$.

Dann gilt: $|I_n| = \frac{1}{2^n}|I_0| = \frac{1}{2^n}(b - a)$

und nach der Bemerkung (b) zu 1.1b ist $I_n, n \in \mathbb{N}$ eine Intervallschachtelung.

Nach dem Vollständigkeitsaxiom gibt es genau ein $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Zu zeigen: $f(x) = 0$

Sei $I_n := \big[-L(b_n - a_n), L(b_n - a_n)\big]$, wobei L eine Lipschitzkonstante von f ist.

Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben, dass $f(x) \in I_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt nämlich $f(x) \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Andererseits gilt $0 \in I_n$ $(n \in \mathbb{N})$, also $0 \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Da $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist und somit $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ genau ein Element enthält, folgt $f(x) = 0$.

Zeige: $f(x) \in I_n$

$x \in I_n$, daher

$$\begin{aligned} & \big|f(x) - f(a_n)\big| \leq L|x - a_n| \leq L|b_n - a_n| \\ \Longrightarrow\quad & f(x) - f(a_n) \leq L(b_n - a_n) \\ \Longrightarrow\quad & f(x) \leq \underbrace{f(a_n)}_{\leq 0} + L(b_n - a_n) \leq L(b_n - a_n) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \left|f(b_n) - f(x)\right| \leq L|b_n - x| \leq L(b_n - a_n) \\
\Longrightarrow\ & \underbrace{f(b_n)}_{\geq 0} - f(x) \leq L(b_n - a_n) \\
\Longrightarrow\ & f(x) \geq -L(b_n - a_n) + \underbrace{f(b_n)}_{\geq 0} \geq -L(b_n - a_n)
\end{aligned}
$$

Also $f(x) \in \big[-L(b_n - a_n), L(b_n + a_n)\big] = I_n$

1.19 Satz *Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq z$.*

(a) Die Funktion $\mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $x \mapsto x^k$ besitzt genau eine Umkehrfunktion. (Bezeichnung: $x \mapsto \sqrt[k]{x}$)

(b) Es gilt: $\big(\sqrt[k]{a}\big)^k = \sqrt[k]{a^k} = a$
$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} \qquad (a, b \geq 0)$

(c) Es gilt: $0 \leq a < b \Longrightarrow \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$

Beweis: (a) Wir zeigen zunächst, dass $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^k$ bijektiv ist.

– **Injektivität:** Sei $x_1 \neq x_2$. O.E.d.A. $x_1 < x_2$ (sonst Umbenennung). Dann ${x_1}^k < {x_2}^k$, d. h. $f(x_1) < f(x_2)$, also $f(x_1) \neq f(x_2)$.

– **Surjektivität:** Sei $x > 0$. Zeige: Es gibt $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ mit $f(x) = y$.
Betrachte $g(y) := f(x) - y \quad (x \geq 0)$ auf $[a, b]$ mit $a := 0$ und $b := y+1$.
$g(x) = g(0) = -y < 0$

$$g(b) = g(y+1) = (y+1)^k - y \overset{\substack{\text{Bernoulli-}\\\text{Ungleichung}\\\downarrow}}{\geq} \underbrace{1 + \underbrace{(k-1)}_{\geq 0}\ \underbrace{y}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

g ist lipschitzstetig auf $[a, b]$:

$$
\begin{aligned}
& \left|g(x_1) - g(x_2)\right| = \left|{x_1}^k - y - ({x_2}^k - y)\right| \\
= \ & \left|{x_1}^k - {x_2}^k\right| \overset{1.5c}{=} \left|(x_1 - x_2) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} {x_1}^{k-1-i} {x_2}^i\right| \\
\leq \ & |x_1 - x_2| \cdot \sum_{i=0}^{k-1} |x_1|^{k-1-i} |x_2|^i = |x_1 - x_2| \cdot \sum_{i=0}^{k-1} b^{k-1} \\
= \ & k b^{k-1} \cdot |x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \in [a, b])
\end{aligned}
$$

Also existiert nach 1.19 ein $x \in [a, b] \subset R_+ \cup \{0\}$ mit $g(x) = 0$, d. h. $f(x) = y$.
Nach 0.19 besitzt f somit genau eine Umkehrfunktion.

(b) $f(a) = a^k$, $f^{-1}(a) = \sqrt[k]{a}$, also
$f\big(f^{-1}(a)\big) = a \Rightarrow \big(\sqrt[k]{a}\big)^k = a$
$f^{-1}\big(f(a)\big) = a \Rightarrow \sqrt[k]{a^k} = a$

$$\left(\sqrt[k]{ab}\right)^k = ab = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k \left(\sqrt[k]{b}\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}\right)^k$$

d. h. $f\big(\sqrt[k]{ab}\big) = f\big(\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}\big)$, also wegen f injektiv $\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$.

(c) Sei $0 \leq a < b$. Annahme $\sqrt[k]{a} \geq \sqrt[k]{b}$.

Dann $\underbrace{\big(\sqrt[k]{a}\big)^k}_{a} \geq \underbrace{\big(\sqrt[k]{b}\big)^k}_{b}$. Widerspruch.

Bemerkung: Die Funktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ $(x \geq 0)$ ist lipschitzstetig auf $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, falls $a > 0$. Sie ist nicht lipschitzstetig auf $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Beweis: Sei $a > 0$. Dann

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \left(\sqrt[k]{x_1}\right)^k - \left(\sqrt[k]{x_2}\right)^k \\ &\overset{1.5a}{=} \left(\sqrt[k]{x_1} - \sqrt[k]{x_2}\right) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sqrt[k]{x_1}\right)^{k-1-i} \left(\sqrt[k]{x_2}\right)^i \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \left|\sqrt[k]{x_1} - \sqrt[k]{x_2}\right| &= \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} \left(\sqrt[k]{x_1}\right)^{k-1-i} \cdot \left(\sqrt[k]{x_2}\right)^i} |x_1 - x_2| \\ &\leq \frac{1}{k\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}} |x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \geq a) \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\left|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{0}\right| = \frac{x}{\left(\sqrt[k]{x}\right)^{k-1}} = \frac{|x - 0}{\sqrt[k]{x}^{k-1}}$$

Für $x = \left(\frac{1}{n}\right)^k$ folgt $\left|\sqrt[k]{x} - 0\right| = \frac{|x-0|}{(\frac{1}{n})^{k-1}} = n^{k-1}|x - 0|$

Die Lipschitzkonstante wäre also größer oder gleich n^{k-1} für jedes $n \in \mathbb{N}$.

§ 2. Folgen und Grenzwerte

Unter der Folge reeller Zahlen versteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. (Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird eine reelle Zahl zugeordnet)
Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.
Verallgemeinerung: Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. $(a_n)_{n\geq n_0}$ d. h. die Abbildung $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$ wird ebenfalls als Folge bezeichnet.

Beispiele:

(a)	$a \in \mathbb{R}$	$a_n = a \ (n \in \mathbb{N})$	$(a, a, a, a, \ldots)$	konstante Folge
(b)		$a_n = \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N})$	$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$	
(c)		$a_n = (-1)^n \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1, 1, -1, \ldots)$	alternierende Folge
(d)	$q \in \mathbb{R}$	$a_n = q^n \ (n \in \mathbb{N})$	$(q, q^2, q^3, \ldots)$	geometrische Folge

Vorsicht: Eine Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ ist nicht dasselbe wie die Menge der Folgeglieder $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, obwohl die übliche Veranschaulichung das nahe legt.

2.1 Definition (Grenzwert einer Folge) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergent gegen } a :\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0} : |a_n - a| < \varepsilon$$

a wird als Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.
Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \textit{oder} \qquad a_n \to a \ (n \to \infty)$$

Ist $a = 0$, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge.
Eine Folge wird als konvergent bezeichnet, wenn sie gegen eine reelle Zahl konvergiert. Andernfalls heißt sie divergent.
Mit Hilfe der offenen Umgebung von a

$$U_\varepsilon(a) := \left]a - \varepsilon, a \neq \varepsilon\right[= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

lässt sich auch sagen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } a \iff \text{In jeder } \varepsilon\text{-Umgebung liegen fast alle } a_n.$$

„fast alle“ heißt hier: „evtl. mit Ausnahme endlich vieler“

2.2 Folgerung

(a) Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt, d. h.

$$\exists_{M>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}} : |a_n| \leq M$$

(b) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \neq 0$, dann sind fast alle $a_n \neq 0$ und es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq n_0}$ beschränkt ist, d. h.

$$\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \exists_{M>0}\ \forall_{n\geq n_0} : \left|\frac{1}{a_n}\right| \leq M$$

(c) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a \geq 0$.

Beweis: (a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$. Sei $\varepsilon = 1$. In $U_\varepsilon(a)$ liegen fast alle a_n, d. h. es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| \leq 1$ $(n \leq n_0)$.
Also: $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq |a| + 1$ $(n \geq n_0)$
Somit $|a_n| \leq \max\bigl(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\bigr)$ $(n \in \mathbb{N})$

(b) $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}|a| > 0$.
Dann liegen fast all a_n in $U_\varepsilon(a)$, d. h. es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{2}|a|$ $(n \geq n_0)$
Also $|a_n| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\geq} |a| - |a_n - a| > |a| - \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}|a|$ $(n \geq n_0)$
Daher: $\frac{1}{|a_n|} < \frac{2}{|a|}$ $(n \geq n_0)$

(c) $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ und $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.
Wäre $a < 0$, dann lägen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ mit $\varepsilon := \frac{1}{2}|a|$.
d. h. es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}|a|$ $(n \geq n_0)$.
Daraus folgt: $a_n - a < \frac{1}{2} \underbrace{|a|}_{-a \text{ (weil } a<0)}$ $(n \geq n_0)$
also $a_n < a - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}a < 0$ $(n \geq n_0)$
Widerspruch zu $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bemerkung: Aus $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt im allgemeinen nicht $a > 0$.

Beispiel: $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ [in Kürze]
$\frac{1}{n} > 0$, aber der Grenzwert ist 0.

2.3 Satz *Jede Folge reeller Zahlen besitzt höchstens einen Grenzwert.*

Beweis: Annahme: $a_n \to a$ und $a_n \to a'$ $(n \to \infty)$ und $a \neq a'$.
Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}|a - a'|$.
Dann $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$.

[Darum:

$$\begin{aligned} & x \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') \\ \Longrightarrow\ & |x-a| < \varepsilon,\ |x-a'| < \varepsilon = \tfrac{1}{2}|a-a'| \\ \Longrightarrow\ & |a-a'| = \big|(x-a')-(x-a)\big| \geq |x-a'| + |x-a| \\ & \quad < \varepsilon + \varepsilon = |a-a'| \\ \Longrightarrow\ & 0 < 0. \text{ Widerspruch} \end{aligned} \quad \Big]$$

Fast alle a_n liegen in $U_\varepsilon(a)$ und fast alle a_n liegen in $U_\varepsilon(a')$. $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$. Widerspruch!

Bemerkung: Erst dieser Satz erlaubt von <u>dem</u> Grenzwert einer konvergenten Folge zu sprechen.

Beispiele: (a) $a_n = a$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

[Denn: Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$|\underbrace{a_n - a}_{0}| < \varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$, d. h. $\forall_{\varepsilon>0}\ \underbrace{\exists_{n_0\in\mathbb{N}}}_{\text{nämlich } n_0=1}\ \forall_{n\geq n_0} : |a_n - a| < \varepsilon$]

(b) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

[Denn: Sei $\varepsilon > 0$. Nach 1.15b (Folgerung aus dem Archimedischen Axiom) gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Dann: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$]

(c) $a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist divergent.
Annahme: Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.
Dann gibt es zu $\varepsilon := 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < 1 \quad (n \geq n_0)$$

$2 = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right| = |a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a|$ $(n \geq n_0)$.
Also $2 < 2$. Widerspruch!

2.4 Lemma (Grenzwerte von Nullfolgen) *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Dann gilt:

(a) $a_n \to 0$ $(n \to \infty) \Longleftrightarrow |a_n| \to 0$ $(n \to \infty)$

(b) $a_n \to 0 \ (n \to \infty) \Longrightarrow \lambda a_n \to 0 \ (n \to \infty)$

(c) $a_n \to 0 \ (n \to \infty),\ b_n \to 0 \ (n \to \infty) \Longrightarrow a_n + b_n \to 0 \ (n \to \infty)$

(d) $b_n \geq 0 \ (n \in \mathbb{N}),\ b_n \to 0 \ (n \to \infty),\ |a_n| \leq b_n \ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow a_n \to 0 \ (n \to \infty)$

Nullfolge: Folge reeller Zahlen mit Grenzwert 0.

Beweis: (a) $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$
$\Longleftrightarrow \ \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \geq n_0} : |a_n - 0| < \varepsilon$
$\Longleftrightarrow \ \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \geq n_0} : \big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$
$\Longleftrightarrow \ |a_n| \to 0 \ (n \to \infty)$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit: $\lambda \neq 0$.
Da a_n Nullfolge ist, gibt es zur positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \quad (n \geq n_0),$$

aber

$$|\lambda_{a_n} - 0| < \varepsilon \quad (n \geq n_0).$$

Somit $\lambda_{a_n} \to 0 \ (n \to \infty)$.

(c) $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$, $b_n \to 0 \ (n \to \infty)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zur positiven Zahle $\frac{\varepsilon}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq n_0)$$

Entsprechend gibt es $n_0{}' \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq n_0{}')$$

Also

$$|a_n + b_n - 0| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Somit $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0{}'' \in \mathbb{N}} : \forall_{n \geq n_0{}''} : |a_n + b_n - 0| < \varepsilon$

(d) $b_n \geq 0 \ (n \in \mathbb{N})$, $|a_n| \leq b_n \ (n \in \mathbb{N})$, $b_n \to 0 \ (n \to \infty)$.
Weil $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge gilt

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \geq n_0} : \overbrace{|b_n - 0|}^{b_n} < \varepsilon$$

Wegen $|a_n| \leq b_n$ folgt

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \geq n_0} : \overbrace{|a_n - 0|}^{|a_n|} < \varepsilon$$

$\Longleftrightarrow a_n \to 0 \ (n \to \infty)$

2.5 Rechenregeln I *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Dann gilt*

(a) $a_n \to a\ (n\to\infty) \Longleftrightarrow a_n - a \to 0\ (n\to\infty) \Longleftrightarrow |a_n - a| \to 0\ (n\to\infty) \Longrightarrow |a_n| \to |a|\ (n\to\infty)$

$$\Big[\ \lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n - a| \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = \big|\lim_{n\to\infty} a_n\big|\ \Big]$$

(b) $a_n \to a\ (n\to\infty),\ b_n \to b\ (n\to\infty) \Longrightarrow a_n \pm b_a \to a \pm b\ (n\to\infty)$

$$\Big[\ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ exist.} \wedge \lim_{n\to\infty} b_n \text{ exist.} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n\ \Big]$$

(c) $a_n \to a\ (n\to\infty),\ b_n \to b\ (n\to\infty) \Longrightarrow a_n b_n \to ab (n\to\infty)$

$$\Big[\ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ exist.} \wedge \lim_{n\to\infty} b_n \text{ exist.} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\ \Big]$$

(d) $a_n \to a\ (n\to\infty),\ b_n \to b \neq 0\ (n\to\infty) \Longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{evtl. erst für} \\ n\geq n_0 \\ \text{definiert}}}{\frac{a_n}{b_n}} \to \frac{a}{b}\ (n\to\infty)$

$$\Big[\ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ exist.} \wedge \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \text{ exist.} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\ \Big]$$

(e) $a_n \to a\ (n\to\infty),\ b_n \to b\ (n\to\infty),\ a_n \geq b_n\ (n\in\mathbb{N}) \Longrightarrow a \geq b$

$$\Big[\ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ exist.} \wedge \lim_{n\to\infty} b_n \text{ exist.} \wedge a_n \geq b_n\ (n\in\mathbb{N}) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n\ \Big]$$

(f) $a_n \to a\ (n\to\infty) \wedge b_n \to a\ (n\to\infty) \wedge a_n \leq c_n \leq b_n\ (n\in\mathbb{N}) \Longrightarrow c_n \to a\ (n\to\infty)$

$$\Big[\ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ exist.} \wedge \lim_{n\to\infty} b_n \text{ exist.} \wedge a_n \leq c_n \leq b_n\ (n\in\mathbb{N}) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n\ \Big]$$

Beweis: (a) $a_n \to a\ (n\to\infty) \Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0} : \underbrace{|a_n - a|}_{|(a_n-a)-0|}$

$$\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0} : \big|(a_n - a) - 0\big| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow a_n - a \to 0\ (n\to\infty) \overset{2.4\text{a}}{\Longleftrightarrow} |a_n - a| \to 0\ (n\to\infty)$$

Wegen $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|$ folgt $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0} : \big||a_n| - |a|\big| < \varepsilon$.
Das ist äquivalent zu $|a_n| \to |a|\ (n\to\infty)$.

(b) $a_n \to a\ (n \to \infty) \wedge b_n \to b\ (n \to \infty) \overset{(a)}{=} a_n - a \to 0\ (n \to \infty),\ b_n - b \to 0\ (n \to \infty)$

$\overset{2\text{-}4c}{=} \underbrace{(a_n - a) + (b_n - b)}_{a_n + b_n - (a+b)} \to 0\ (n \to \infty) \overset{(a)}{\Longleftrightarrow} a_n + b_n \to a + b\ (n \to \infty)$

(c) $a_n \to a\ (n \to \infty),\ b_n \to b\ (n \to \infty) \Rightarrow$

$$|a_n b_n - ab| = \big|(a_n - a)b_n + a(b_n - b)\big| \le \overbrace{|a_n - a|}^{\to 0\ (n\to\infty)} \underbrace{|b_n|}_{\substack{\le M \\ \text{unabhängig von } n\text{, weil konvergente} \\ \text{Folgen beschränkt sind}}} + |a| \overbrace{|b_n - b|}^{\to 0\ (n\to\infty)}$$

$$\underbrace{\underbrace{|a_n - a| \cdot M}_{\to 0 \text{ nach } 2.4b} + \underbrace{|a| \cdot |b_n - b|}_{\to 0 \text{ nach } 2.4b}}_{\to 0 \text{ nach } 2.4c}$$

Also nach 2.4d $|a_n b_n - ab| \to 0\ (n \to \infty) \overset{(a)}{\Longleftrightarrow} a_n b_n \to ab$

(d) $a_n \to a\ (n \to \infty),\ b_n \to b \neq 0\ (n \to \infty)$

Dann:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|}$$

$$\le \frac{\tilde{M}}{|b|} \underbrace{|b_n - b|}_{\to 0} \quad (n \ge n_0)$$

Also $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}\ (n \to \infty)$

[Nach 2.2b exist. $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\tilde{(}M) > 0$, so dass $b_n \neq 0\ (n \ge n_0)$ und $|\frac{1}{b_n}| \le \tilde{M}$]

$a_n \to a\ (n \to \infty),\ b_n \to b\ (n \to \infty),\ \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}\ (n \to \infty)$

$\overset{(c)}{\Longrightarrow} \underbrace{a_n \cdot \frac{1}{b_n}}_{\frac{a_n}{b_n}} \to \underbrace{a \cdot \frac{1}{b}}_{\frac{a}{b}} \quad (n \to \infty)$

(e) $a_n \to a \wedge b_n \to b,\ a_n \ge b_n \quad (n \in \mathbb{N})$

Zu zeigen: $a \ge b$

$\underbrace{a_n - b_n}_{\ge 0} = \underbrace{a_n}_{\to a} + \underbrace{(-1)\underbrace{b_n}_{\to b}}_{\to (-1)b} \overset{2.5b}{\to} a + (-1)b = a - b$

Nach 2.2c folgt wegen $a_n - b_n \ge 0$, dass $a - b \ge 0$.

(f) $a_n \to \wedge b_n \to a,\ a_n \le c_n \le b_n$

Zu zeigen: $c_n \to a$

$|c_n - a| \le |c_n - a_n| + |a_n - a| \le \underbrace{|b_n - a_n|}_{\to 0} + \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0} \to 0$

Daher $c_n \to a \quad (n \to \infty)$.

2.6 Rechenregeln II

(a) Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig, $a_n \in I$ $(n \in \mathbb{N})$, $a \in I$. Dann gilt

$$a_n \to a \quad (n \to \infty) \Longrightarrow f(a_n) \to f(a) \quad (n \to \infty)$$

$$\Big[\quad \lim_{n\to\infty} a_n \textit{ exist. und liegt in } I \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} a_n\big) \quad \Big]$$

(b) $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $a_n \to a$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Dann

$$\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a} \quad (n \to \infty)$$

$$\Big[\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n} \quad \Big]$$

Bemerkung:
1. Mit dem später zu behauptenden Begriff der Stetigkeit bedeutet (a): Jede lipschitzstetige Funktion ist stetig.
2. (b) enthält die Aussage, dass die k-te Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ stetig ist.

Beweis: (a) $a_n \to \underbrace{a}_{\in I}$ $(n \to \infty)$. Dann

$$\big|f(a_n) - f(a)\big| \leq L \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0 \ (n\to\infty)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Somit $f(a_n) \to f(a)$ $(n \to \infty)$.

(b) **1. Fall:** $a > 0$. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}|a|$.
$a_n \to a$ $(n \to a)$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad (n \geq n_0)$$

woraus

$$a_n \in \big[\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}c\big] \quad (n \geq n_0)$$

folgt.
Nach der Bemerkung zu Satz 2.10 ist die Funktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ für $x \geq \frac{a}{2}$ lipschitzstetig (weil $a > 0$), also insbesondere auch auf $\big[\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}c\big]$. Somit folgt nach (a) $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$ $(n \to \infty)$.

2. Fall: $a = 0$. Hier wird „Epsilentik" benötigt.
Sei $\varepsilon > 0$, $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.
Zu der reellen Zahl $\varepsilon^k > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\underbrace{|a_n - 0|}_{a_n} < \varepsilon^k \quad (n \geq n_0)$$

Also $\sqrt[k]{a_n} < \varepsilon^k \quad (n \geq n_0)$
d. h. $\big|\sqrt[k]{a_n} - 0\big| < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$
Somit $\sqrt[k]{a_n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

2.7 Einige Grenzwerte

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$*. Dann* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$*,* $k \geq 2$*. Dann* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0.$

(c) Sei $a \in \mathbb{R}$*,* $a > 0$*. Dann* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

(d) Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

(e) Sei $q \in \mathbb{R}$*,* $|q| < 1$*,* $k \in \mathbb{N}_0$*. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0$$

$$\left[\quad \textit{Bsp.:} \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{2^n} = 0 \quad\right]$$

Beweis: (a) $0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$. Also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$

Andere Beweismöglichkeit:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{k\text{-mal}} = 0$

(b) $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Nach 2.6b folgt $\sqrt[k]{\frac{1}{n}} \to 0.$

(c) **1. Fall:** $a \geq 1$.

Dann

$$1 \leq a \leq n \quad (n \geq [a]+1)$$

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1 \text{ nach (d)}} \quad (n \geq [a]+1)$$

Also

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

2. Fall: $0 < a < 1$. Dann $\frac{1}{a} > 1$, also nach dem 1. Fall

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

Nach 2.5d folgt

$$\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}}_{\sqrt[n]{a}} \to \frac{1}{1} = 1$$

(d) $n = \Big(1 + \underbrace{(\sqrt[n]{n} - 1)}_{\geq 0}\Big)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \underbrace{\tbinom{n}{k}}_{\geq 0} \underbrace{(\sqrt[n]{n} - 1)}_{\geq 0}^k \geq \tbinom{n}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$

Daher

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} \quad (n \geq 2)$$

Somit

$$|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \sqrt{\frac{n}{\binom{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}} = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{n}}}_{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 0 \quad (n \to 0)$$

$$\left[\quad \frac{1}{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty) \overset{2.6b}{\Longrightarrow} \sqrt{\frac{1}{n-1}} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad\right]$$

(e) $k \in \mathbb{N}_0$, $|q| < 1$. Dann

$$\frac{1}{|q|} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{n^k}\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \frac{1}{n^k}\left(1 + (\frac{1}{|q|} - 1)\right)^n$$

binomischer Satz

$$\downarrow$$

$$= \frac{1}{n^k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)^i \geq \frac{1}{n^k}\binom{n}{k+1}\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)^{k+1} \qquad (n \geq k+1)$$

Kehrwertbildung auf beiden Seiten

$$\downarrow$$

$$\Longrightarrow n^k|q|^n \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}} \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)^{k+1}}$$

$$= \frac{n^k}{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)^{k+1}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{\frac{(k+1)!}{(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k}{n})}}_{\to \frac{(k+1)!}{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)^{k+1}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Bemerkung: Oft sind wie im vorigen Beweis Umformungen nötig, um einen Grenzwert zu bestimmen, z.B.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\left[\quad 0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \right]$$

2.8 Definition (Häufungspunkte einer Folge) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. a heißt Häufungspunkte der Folge, wenn gilt*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{n_0\in\mathbb{N}}\ \exists_{n\geq n_0} : |a_n - a| < \varepsilon$$

Mit Hilfe der ε-Umgebung von a lässt sich äquivalent schreiben:
a Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $:\Longleftrightarrow$ In jeder ε-Umgebung von a liegen unendlich viele Folgenglieder

2.9 Folgerung *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergierende Folge. Dann ist a der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis: a Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Longrightarrow$ In jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle a_n

[„fast alle" = evtl. mit Ausnahme unendlich vieler]

$\Longrightarrow$ In jeder ε-Umgebung von a liegen unendlich viele a_n

$\Longrightarrow$ a Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zeige: a ist der einzige Häufungspunkt

Sei $a' \neq a$ ein weiterer Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}|a - a'|$. Dann $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$

$$\left[\quad \text{Dann:} \quad \begin{array}{l} x \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') \Longrightarrow |x-a| < \varepsilon,\ |x-a'| < \varepsilon \\ \Longrightarrow |a-a'| < |x-a| + |a-x'| < 2\varepsilon - |a-a'| \\ \Longrightarrow 0 < 0 \end{array} \quad \right]$$

Da mit Ausnahme höchstens endlich vieler n alle a_n in $U_\varepsilon(a)$ liegen, können in $U_\varepsilon(a')$ höchstens endlich viele a_n liegen. Somit ist a' kein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel: (a) $a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ hat die Häufungspunkte -1 und 1.

$$\left[\quad \begin{array}{rcl} a_{2n} & = & (-1)^{2n} = 1 \in U_\varepsilon(1)\ (n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0) \\ a_(2n-1) & = & (-1)^{2n-1} = -1 \in U_\varepsilon(-1)\ (n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0) \end{array} \quad \right]$$

Weitere Häufungspunkte existieren nicht. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Mit $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\bigl(|a-1|,\ |a+1|\bigr)$ folgt $1 \notin U_\varepsilon(a)$ und $-1 \notin U_\varepsilon(a)$ d. h. kein a_n ist Element von $U_\varepsilon(a)$. Somit ist a kein Häufungspunkt der Folge.

(b) $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ hat keinen Häufungspunkt.

[Begründung: Für festes a haben fast alle n Abstand > 1 von a.]

2.10 Satz von Bolzano-Weierstraß (1. Fassung) *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine* *beschränkte* *Folge reeller Zahlen, d. h.*

$$\exists_{M>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}} : |a_n| \leq M$$

Dann besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis: Idee: Bei jeder Unterteilung in zwei Teilintervalle gibt es mindestens eines, das unendlich viele Folgeglieder beinhaltet.

Sei $I_0 := [-M, M] =: [A_0, B_0]$ enthält unendlich viele (nämlich alle) Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rekursive Definition: Sei $I_n = [A_n, B_n]$ ein Intervall der Länge $\frac{B_0-A_0}{2^n}$, das unendlich viele Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beinhaltet

$$C_n := \frac{A_n + B_n}{2}$$

Setze $I_n + 1 := \begin{cases} [A_n, C_n] & \text{falls in } [A_n, C_n] \text{ unendlich viele } a_n \text{ liegen} \\ [C_n, B_n] & \text{falls in } [A_n, C_n] \text{ nur endlich viele } a_n \text{ liegen} \end{cases}$

Nach Konstruktion ist $\underbrace{|I_{n+1}|}_{\substack{\text{Länge des}\\ \text{Intervalls}}} = \frac{|I_n|}{2} = \frac{B_0-A_0}{2^{n+1}}$ und es liegen unendlich viele a_n in I_{n+1}.

Dann bildet $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung und es gibt daher ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} I_n = \{a\}.$$

Behauptung: a ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Sei $\varepsilon > 0$. Zeige: In $U_\varepsilon(a)$ liegen unendlich viele Folgeglieder.

Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|F_1| < \varepsilon$.

Wegen $a \in I_n$ und $|I_n| < \varepsilon$ folgt

$$I_n \subset U_\varepsilon(a).$$

$$\left[\quad x \in I_n,\ a \in I_n \Rightarrow |x - a| \leq |I_n| < \varepsilon \Longrightarrow x \in U_\varepsilon(a) \quad\right]$$

Da in I_n nach Konstruktion unendlich viele a_n liegen, liegen auch in $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele a_n.

2.11 Definition (Teilfolge) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ einer aufsteigenden Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beispiele: (a) $\left(\frac{1}{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sind Teilfolgen von $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left[\quad n_k = 2k, \quad n_k = 2^k \quad\right]$$

(b) $(n_k + 1)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left[\quad n_k = k + 1 \quad\right]$$

2.12 Folgerung *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt*

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ $(n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ *Jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.*

(b) a ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Longleftrightarrow$ *Es existiert (mindestens) eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.*

Beweis: (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Dann liegen in jeder ε-Umgebung von a fast alle a_n, also auch fast alle a_{n_k}. Daher $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$.

(b) „$\Longleftarrow$“ $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen a.
Als Grenzwert von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist a auch Häufungspunkt von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, daher liegen unendlich viele a_{n_k} in jeder ε-Umgebung von a. Somit liegen unendlich viele a_n in jeder ε-Umgebung von a, d. h. a ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

„$\Longrightarrow$“ Sei a Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setze $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$.
In $U_{\varepsilon_1}(a)$ liegen unendlich viele $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, insbesondere gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$.
In $U_{\varepsilon_2}(a)$ liegen ebenfalls unendlich viele $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, daher gibt es ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$ und $a_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$ usw.
Man erhält auf diese Weise

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

mit $a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$ $(k \in \mathbb{N})$.

Zeige $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann exist. $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$. Also für $k \geq k_0$

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon_k = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon$$

Beispiel: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \Longrightarrow (a_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} \to a,\ (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} \to a,\ (a_{2^k})_{k\in\mathbb{N}} \to a.$

2.13 Satz von Bolzano-Weierstraß (2. Fassung) *Jede beschränkte Folge enthält (mindestens) eine konvergierende Teilfolge.*

Beweis: Folgt sofort aus 2.10 und 2.12b.

2.14 Definition (monotone Folge) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Sie heißt*

(a) *(streng) monoton wachsend* $:\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} : a_{n+1} \overset{(>)}{\geq} a_n$

(b) *(streng) monoton fallend* $:\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} : a_{n+1} \underset{(<)}{\leq} a_n$

(c) *(streng) monoton, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.*

Beispiele: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton fallend
$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton wachsend
$(1)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton

2.15 Satz (Konvergenz beschränkter monotoner Folgen) *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens einen Häufungspunkt a und eine gegen a_n konvergierende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Zeige: $a_n \to a \quad (n\to\infty)$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_{n_k} \to a$ $(k\to\infty)$ exist. $k_0 \in \mathbb{N}_0$ so dass

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad (k \geq k_0)$$

Behauptung: $|a_n - a| < \varepsilon \quad (n \geq n_k)$

Sei $n \geq n_{k_0}$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$, so dass $n_k \leq n \leq n_{k+1}$.

$$a_n - a \underset{\substack{\uparrow \\ n < n_{k+1}}}{\leq} a_{n_{k+1}} - a \leq |a_{n_{k+1}} - a| \overset{(*)}{<} \varepsilon$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend

$$a - a_n \underset{\substack{\uparrow \\ n_k \leq n}}{\leq} a - a_{n_k} \leq |a - a_{n_k}| < \varepsilon$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend

$$\Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Bemerkung: (a) Da eine monoton wachsende (fallende) Folge automatisch nach unten (oben) beschränkt ist, kann 2.15 auch folgendermaßen formuliert werden:

Jede nach oben (unten) beschränkte monoton wachsende (fallende) Folge ist konvergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend (fallend) und oben (unten) beschränkt

$$\Longrightarrow a_n \overset{(\geq)}{\leq} \lim_{k\to\infty} a_k$$

Beweis: (b) $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_k, \quad a_n \leq a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\Longrightarrow \underbrace{a_n}_{\substack{\text{konstante}\\ \text{Folge bezgl. } k}} \leq a_k \quad (k > n)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\lim_{k\to\infty} a_n}_{a_n} \leq \lim_{k\to\infty} a_k = a \quad (n \in \mathbb{N})$$

2.16 Heronverfahren zur Berechnung der Quadratwurzel

Sei $a > 0$, $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Motivation des Verfahrens:

Sei x_n eine (gute) Näherung an $\sqrt{a}$.
Ansatz: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, wobei δ_n so gewählt wird, dass $(x_n + \delta_n)^2 \approx a$.

$$x_n{}^2 + 2x_n \cdot \delta_n + \underbrace{\delta_n{}^2}_{\substack{\text{wird vernachlässigt, da ziemlich klein}\\ \text{gegenüber den anderen Termen}}} = a$$

$$x_n{}^2 + 2x_n \cdot \delta_n = a$$

$$\Longrightarrow \quad \delta_n = \frac{a - x_n{}^2}{2x_n}$$

$$\Longrightarrow \quad x_{n+1} = x_n + \delta_n = x_n + \frac{a - x_n{}^2}{2x_n}$$

$$= x_n + \frac{1}{2}\frac{a}{x_n} - \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Beweis:

1. Durch vollständige Induktion ergibt sich sofort $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$
2. $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \overset{\text{ÜA}}{\geq} \sqrt{a}$ $(n \in \mathbb{N})$, d. h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt.
3. Zeige $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \sqrt{a} \leq x_n \\ \text{nach 2.}}}{\leq} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{{x_n}^2}{x_n}\right) = x_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

4. Nach Satz 2.15 existiert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und wegen $x_n \geq \sqrt{a}$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \sqrt{a} > 0$.

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\to x} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{x_n}_{\to x} + \underbrace{\tfrac{a}{x_n}}_{\to \frac{a}{x}}\right) \quad \underset{(n\to\infty)}{(n \in \mathbb{N})}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \implies \frac{x}{2} = \frac{a}{2x} \implies x^2 = a \overset{x>0}{\implies} x = \sqrt{a}.$$

[Verallgemeinerung: $a > 0,\ x_0 > 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}(k-1)x_n + \frac{a}{{x_n}^{k-1}} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \text{ konvergiert gegen } \sqrt[k]{a}.$$]

2.17 Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel

Seien $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, $n \geq 2$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

Beweis: (Cauchy) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_1, \ldots, a_n > 0$

Betrachte die Aussage $A(n) :\iff \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$

1. Schritt: $A(2)$ ist wahr nach ÜA 22a:

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = a_2$.

2. Schritt: $\forall_{n\in\mathbb{N}} : A(n) \Rightarrow A(2n)$

$$\begin{aligned}
\sqrt[2n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} &= \sqrt{\underbrace{\sqrt[n]{a_n \cdot \ldots \cdot a_n}}_{a}\ \underbrace{\sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}}_{b}} \\
&\overset{A(2)}{\leq} \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}_{a} + \underbrace{\sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}}_{b}\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) + \frac{1}{n}(a_{n+1} + \ldots + a_{2n})\Big) \\
&= \frac{1}{2n}(a_1 + \ldots + a_{2n})
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}$ und $a_1 = \ldots = a_n$ und $a_{n+1} = \ldots a_{2n}$, d. h. $a_1 = a_2 = \ldots a_{2n}$.

3. Schritt: $\forall_{n\in\mathbb{N}},\ n \geq 4 : A(n) \Rightarrow A(n-1)$

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_{n-1})} \\
&\overset{A(2)}{\leq} \frac{1}{n}\underbrace{\Big(a_1 + \ldots + a_{n-1} + \frac{1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_{n-1})\Big)}_{(1+\frac{1}{n-1})(a_1+\ldots+a_{n+1})} \\
&= \frac{1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_{n-1}) \\
\iff\ & (a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}) \cdot \frac{1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_{n-1}) \leq \left(\frac{1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_{n-1})\right)^n \\
\iff\ & a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \leq \left(\frac{1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_{n-1})\right)^{n-1} \\
\iff\ & \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} \leq \frac{1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_{n-1})
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a_1 = \ldots = a_{n-1} = \frac{1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_{n-1})$, d. h. $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$.

2.18 Folgerung *Ein Produkt aus n positiven reellen Zahlen mit konstanter Summe ist am größten, wenn alle Faktoren gleich sind.*

Motivation der Exponentialfunktion

$\underbrace{K_0}_{\substack{\text{angelegtes}\\ \text{Kapital}}}(1 + x)$ $\qquad x$ Zinssatz, z.B. $x = 0.03$

$K_0\Big(1 + \dfrac{x}{2}\Big)\Big(1 + \dfrac{x}{2}\Big) = K_0\Big(1 + \dfrac{x}{2}\Big)^2$ $\qquad$ 2 Zinstermine pro Jahr

$K_0\Big(1 + \dfrac{x}{n}\Big)^n$ $\qquad n$ Zinstermine pro Jahr

2.19 Definition und Satz

(a) $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ *existiert und ist gleich* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ $\left[\begin{array}{c} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{array}\right]$

(b) Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ *ist wohl definiert und wird als Exponentialfunktion bezeichnet.*

(c) $\forall_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} :\ \exp(x_1+x_2) = \exp(x_1)\cdot\exp(x_2)$

Beweis: (a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist (streng) monoton wachsend, denn:

$$\underbrace{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\cdot 1}_{\substack{n+1 \text{ Faktoren mit der} \\ \text{Summe } n(1+\frac{1}{n})+1=n+1}} \overset{2.18}{<} \underbrace{\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\substack{n+1 \text{ Faktoren mit der Summe} \\ (n+1)(1+\frac{1}{n+1})=n+2}}$$

$$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!n^k}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} \qquad (*)\end{aligned}$$

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \qquad (**)$$

Wegen $k! \geq 2^{k-1}$ $(k\in\mathbb{N})$ [ÜA 32a] folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\\ &= 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \le 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \qquad (***)\end{aligned}$$

Also sind sowohl $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende nach oben (durch 3) beschränkte Folgen, daher existieren $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ und es gilt nach (**) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \le \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

$$\begin{aligned}0 &\overset{(**)}{\le} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\\ &\overset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}_{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}} -\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-\frac{1}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k-1}{n})}{k!}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\Big(1-\underbrace{(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\ldots(1-\tfrac{k-1}{n})}_{1 \text{ für } k=1}\Big)\\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\Big(1-(1-\tfrac{1}{n})\ldots(1-\tfrac{k-1}{n})\Big)\end{aligned}$$

$$\Big[\quad \left((1-\tfrac{1}{n})\dots(1-\tfrac{k-1}{n})\right) \geq 1-\left(\tfrac{1}{n}+\dots+\tfrac{k-1}{n}\right)$$

$$= 1-\tfrac{1}{n}(1+2+\dots+l-1) = 1-\tfrac{k(k-1)}{2n}$$

$$\Longrightarrow 1-(1-\tfrac{1}{n})\dots(1-\tfrac{k-1}{n}) \leq \tfrac{k(k-1)}{2n} \quad \Big]$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=2}^{n} \tfrac{1}{k!}\tfrac{k(k-1)}{2n} = \sum_{k=2}^{n} \tfrac{1}{(k-2)!}\cdot\tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{2n}\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\tfrac{1}{k!} \\ &\overset{(***)}{\leq} \tfrac{3}{2n} \to 0 \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

also $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

(b) Für $n > |x|$ gilt $\frac{|x|}{n} < 1$, d. h. $1+\frac{x}{n} \geq 1-\frac{|x|}{n} > 0$. Daher $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist (streng) monoton wachsend, denn:

$$\underbrace{\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\cdot 1}_{\substack{n+1 \text{ Faktoren mit der} \\ \text{Summe } n(1+\frac{x}{n})+1= \\ n+x+1=n+1+x}} \quad \leq \quad \underbrace{\left(1+\tfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}_{\substack{n+1 \text{ Faktoren mit der Summe} \\ (n+1)(1+\frac{x}{n+1})=n+1+x}}$$

Daher $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N},\ n\geq|x|}$ monoton wachsend.

$$\begin{aligned} \left|\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right| &= \left(\left|1+\tfrac{x}{n}\right|\right)^n \leq \left(1+\tfrac{|x|}{n}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wähle } N\in\mathbb{N} \\ \text{mit } N>|x|}}{\leq} \left(1+\tfrac{N}{n}\right)^n \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bernoulli-} \\ \text{Ungleichung}}}{\leq} \left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^N\right)^n = \left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\right)^N \overset{(a)}{\leq} e^N \end{aligned}$$

Also ist $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n_{n\in\mathbb{N},\ n\geq|x|}$ nach oben beschränkt. Daher existiert nach 2.15 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

(c) Wir zeigen nachher $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad (x,y\in\mathbb{R}) \quad (\#)$

$$\begin{aligned} \left(1+\tfrac{x_1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\tfrac{x_2}{n}\right)^n &= \left(\left(1+\tfrac{x_1}{n}\right)\left(1+\tfrac{x_2}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(1+\tfrac{x_1}{n}+\tfrac{x_2}{n}+\tfrac{x_1x_2}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\overset{(\#)}{\longrightarrow} \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{x_1+x_2}{n}\right)^n = \exp(x_1+x_2)$$

$$\begin{aligned}
(\#):\quad & \left|\left(1+\tfrac{x}{n}+\tfrac{y}{n^2}\right)^n-\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right| = \left|\left(\left(1+\tfrac{x}{n}\right)+\tfrac{y}{n^2}\right)^n-\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right| \\
= \; & \left|\left(\sum_{k=0}^{n}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^{n-k}\left(\tfrac{y}{n^2}\right)^k\binom{n}{k}\right)-\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right| \\
= \; & \left|\sum_{k=1}^{n}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^{n-k}\left(\tfrac{y}{n^2}\right)^k\binom{n}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left(\left|1+\tfrac{x}{n}\right|\right)^{n-k}\left|\tfrac{y}{n^2}\right|^k\binom{n}{k} \\
\le \; & \sum_{k=1}^{n}\left(1+\tfrac{|x|}{n}\right)^{n-k}\tfrac{|y|^k}{n^{2k}}\binom{n}{k} \\
\le \; & \sum_{k=1}^{n}\left(1+\tfrac{|x|}{n}\right)^{n-k}\tfrac{|y|^k}{n^k\cdot n}\binom{n}{k} = \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\tfrac{|x|}{n}\right)^{n-k}\left(\tfrac{|y|}{n}\right)^k\binom{n}{k} \\
\le \; & \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1+\tfrac{|x|}{n}\right)^{n-k}\left(\tfrac{|y|}{n}\right)^k\binom{n}{k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Binom. Satz}}}{=} \tfrac{1}{n}\Big(1+\underbrace{\tfrac{|x|}{n}+\tfrac{|y|}{n}}_{\frac{|x|+|y|}{n}}\Big)^n \\
\overset{(b)}{\le} \; & \tfrac{1}{n}e^{|x|+|y|} \to 0 \qquad (n\to\infty) \quad (x,y \text{ fest})
\end{aligned}$$

Bemerkung: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\cdot x^k$ lässt vermuten, dass $\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ gilt.

Das ist richtig und wird später auf andere Weise bewiesen.

2.20 Folgerung

(a) $\exp(0)=1$, $\exp(1)=e$, $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$ $(x\in\mathbb{R})$, $\exp(x)>0$ $(x\in\mathbb{R})$

(b) $\exp(m)=e^m$ $(m\in\mathbb{Z})$, $\exp(\frac{1}{n})=\sqrt[n]{e}$ $(n\in\mathbb{N},\ n\ge 2)$

(c) $x_1>x_2 \Longrightarrow \exp(x_1)>\exp(x_2)$ $(x_1,x_2\in\mathbb{R})$

(d) exp *ist lipschitzstetig auf* $\{x\in\mathbb{R}: x\le a\}$ *für jedes* $a\in\mathbb{R}$

(e) $x_n\to x \Longrightarrow \exp(x_n)\to\exp(x)$

$$\left[\quad \lim_{n\to\infty}x_n \textit{ exist.} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\exp(x_n)=\exp(\lim_{n\to\infty}x_n)\quad\right]$$

(f) $\exp(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+ \ \big(:=\{y\in\mathbb{R}: y>0\}\big)$

Beweis: (a) $\exp(0)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n=1$

$\exp(1)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$1=\exp(0)=\exp(x+(-x))\overset{2.19c}{=}\exp(x)\cdot\exp(-x)\quad(x\in\mathbb{R})$

Also insbesondere $\exp(x)\neq 0$ und es folgt $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$

$\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{\ge 1 \text{ für } x\ge 0}\ge 1\ (x>0)$

$\Longrightarrow \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}>0\quad(x\ge 0)$

(b) $\exp(n \cdot x) = \exp(\underbrace{x + \ldots + x}_{n\text{-mal}}) \overset{2.19c}{=} \underbrace{\exp(x) \cdot \ldots \cdot \exp(x)}_{n\text{-mal}} =$

$$= \big(\exp(x)\big)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$\exp(-n \cdot x) = \exp\big(n \cdot (-x)\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{soeben} \\ \text{bewiesen}}}{=} \big(\exp(-x)\big)^n \overset{(a)}{=} \big(\frac{1}{\exp(x)}\big)^n =$

$$= \big(\exp(x)\big)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$\exp(0 \cdot x) = \exp(0) = 1 = \big(\exp(x)\big)^0$

$\Longrightarrow \exp(m \cdot x) = \big(\exp(x)\big)^m \ (n \in \mathbb{Z})$

$x = 1$:

$$\exp(m) = \exp(m \cdot 1) = \big(\exp(1)\big)^m = e^m$$

$x = \frac{1}{n}$:

$$e = \exp(1) = \exp(n \cdot \frac{1}{n}) \overset{x=\frac{1}{n}}{=} \big(\exp(\frac{1}{n})\big)^n$$

$\Longrightarrow \sqrt[n]{e} = \exp(\frac{1}{n}) \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$

(c) $x > 0 \Longrightarrow \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bernoulli-} \\ \text{Ungleichung}}}{\geq} 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x > 1$

$x_1 > x_2 \Longrightarrow x_1 - x_2 > 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{soeben} \\ \text{bewiesen}}}{\Longrightarrow} \underbrace{\exp(x_1 - x_2)}_{\exp(x_1)\cdot\exp(-x_2)} > 1$

$\Longrightarrow \exp(x_1) \cdot \frac{1}{\exp(x_2)} > 1 \Longrightarrow \exp(x_1) > \exp(x_2)$

(d) Zeige zunächst: $\left|\frac{\exp(x)-1}{x}\right| \leq 1 \ (x < 0)$ $(*)$

$\frac{1-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{|x|} \underset{\substack{\uparrow \\ n > |x| \Rightarrow \frac{x}{n} \geq -|\frac{x}{n}| \geq -1 \\ \text{Bernoulli-Ungleichung}}}{\leq} \frac{1-\left(1+n\cdot\frac{x}{n}\right)}{|x|} = -\frac{x}{|x|} = 1 \ (x < 0,\ n > |x|)$

Also durch Grenzübergang $n \to \infty$:

$$\frac{1 - \exp(x)}{|x|} \leq 1 \quad (x < 0)$$

Wegen $\exp(x) < \exp(0) = 1$ $(x < 0)$ folgt

$$0 \leq \frac{1 - \exp(x)}{|x|} \leq 1 \qquad \text{und somit} \qquad \left|\frac{1 - \exp(x)}{x}\right| \leq 1 \quad (x < 0)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_1 < x_2 \le a$. Dann nach $(*)$

$$\left|\frac{\exp(x_1 - x_2) - 1}{x_1 - x_2}\right| \le 1$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\exp(x_1) \cdot \frac{1}{\exp(x_2} - 1}{|x_1 - x_2|}\right| \le 1$$

$$\big|\exp(x_1) - \exp(x_2)\big| \le \exp(x_2) \cdot |x_1 - x_2| \overset{(c)}{\le} \exp(a) \cdot |x_1 - x_2|$$

(e) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Nach 2.2a ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, insbesondere erst $a \in \mathbb{R}$, so dass $x_n \le a$ $(n \in \mathbb{N})$. Außerdem $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le a$. Nach (d) ist exp lipschitzstetig auf $\{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$.
Die Behauptung folgt dann aus 2.6(b).

(f) Zu zeigen: Für $y > 0$ exist. $x \in \mathbb{R}$, so dass $\exp(x) - y = 0$.

1. Fall: $y \ge 1$. Betrachte $g(x) := \exp(x) - y$ $(x \in \mathbb{R})$
 $g(y) = \exp(y) - y \ge \big(1 + \frac{y}{1}\big)^1 - y = 1 > 0$
 $g(0) = \exp(0) - y = 1 - y \le 0$
 Nach (d) ist g lipschitzstetig insbesondere auf $[0, y]$, also exist. nach dem Zwischenwertsatz (vorläufige Fassung) ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $g(x) = 0$, d. h. $\exp(x) - y = 0$.

2. Fall: $0 < y < 1$: Dann gilt $\frac{1}{y} > 1$ und nach dem 1. Fall existiert $\tilde{(}x) \in \mathbb{R}$, so dass $\exp(\tilde{x}) = \frac{1}{y}$, woraus $\exp(-\tilde{x}) = \frac{1}{\exp(\tilde{x})} = y$ folgt. Mit $x := -\tilde{x}$ ergibt sich $\exp(x) = y$.

Bemerkung: Wegen 2.20(b) und 2.19(c) schreiben wir $\exp(x) = e^x$, insbesondere $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$

$e^{mx} = (e^x)^m$ $(m \in \mathbb{Z})$.

$r = \frac{s}{t}$ $s \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{N}$

$\exp(\underbrace{\tfrac{s}{t}}_{r}) = \underbrace{\sqrt[t]{e^s}}_{e^r :=}$ (Folgerung aus 2.20b)

2.21 Satz und Definition

(a) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \exp(x)$ *besitzt genau eine Umkehrfunktion.*

(Bezeichnung: $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *natürlicher Logarithmus)*

(b) $e^{\ln x} = x$ $(x > 0)$, $\ln\big(e^x\big) = x$ $(x \in \mathbb{R})$
$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$ $(x_1, x_2 > 0)$
$\ln x^m = m \cdot \ln x$ $(m \in \mathbb{Z},\ x > 0)$

(c) $0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$

(d) $\ln$ *ist lipschitzstetig auf* $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ *für jede* $a > 0$.

(e) $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x > 0 \Longrightarrow \ln x_1 \to \ln x$ $(n \to \infty)$

Beweis: (a) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \exp(x)$ ist injektiv nach 2.20(d) und surjektiv nach 2.20(f), also gibt es nach 0.19 genau eine Umkehrfunktion.

(b) Die ersten beiden Gleichungen folgen aus

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad (y > 0), \qquad f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\Big[\quad \exp(\ln y) \qquad\qquad \ln\big(\exp(x)\big) \quad \Big]$$

$$e^{\ln(x_1 x_2)} = x_1 \cdot x_2) e^{ln x_1} \cdot e^{\ln x_2} \overset{2.19c}{=} e^{\ln x_1 + \ln x_2} \quad (x_1, x_2 > 0)$$

Aus der Injektivität der Exponentialfunktion folgt

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$$

Analog:

$$e^{\ln \frac{x_1}{x_2}} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{\ln x_1}}{e^{\ln x_2}} = e^{\ln x_1 - \ln x_2}$$

$$\Longrightarrow \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$$

$$\ln x^n = \ln(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{soeben} \\ \text{bewiesen}}}{=} \underbrace{\ln x + \ldots + \ln x}_{n\text{-mal}} = n \cdot \ln x \quad (n \in \mathbb{N},\ x > 0)$$

$$\ln\big(x^{-n}\big) = \ln \frac{1}{x^n} = \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ wegen} \\ \exp(0) = 1}}{\ln 1} - \ln x^n = -\ln x^n = -n \ln x$$

$$\ln\big(x^0\big) = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln x$$

$$\Longrightarrow \ln x^m = m \cdot \ln x \ (m \in \mathbb{Z}).$$

(c) $0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow e^{\ln x_1} < e^{\ln x_2}$
Annahme: $\ln x_1 \geq \ln x_2$
$\overset{2.20c}{\Longrightarrow} \underbrace{e^{\ln x_1}}_{x_1} \geq \underbrace{e^{\ln x_2}}_{x_2}$
Daher: $\ln x_1 < \ln x_2$.

(d) Zeige zunächst: $\left(\frac{\ln y}{y-1}\right) \leq 1 \ (y > 1)$ $\qquad (*)$

Beweis: $\frac{(1+\frac{x}{n})^n - 1}{x} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Bernoulli-}\\ \text{Ungleichung}}}{\geq} \frac{1+x-1}{x} = 1 \ (x > 0)$

Grenzübergang $n \to \infty$:

$$\frac{e^x - 1}{x} \geq 1 \quad (x > 0)$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{e^x - 1}{x}\right| \geq 1 \quad (x > 0) \qquad (**)$$

Sei $y > 1$. Dann $x := \ln y \overset{(c)}{>} \ln 1 = 0$, d. h. aus $(**)$ folgt

$$\left|\frac{e^{\ln y} - 1}{\ln y}\right| \geq 1$$

$$\Longrightarrow \frac{|y-1|}{|\ln y|} \geq 1 \Longrightarrow \frac{|\ln y|}{|y-1|} \leq 1$$

Sei $x_1 > x_2 \geq a$: Setze in $(*)$ $y := \frac{x_1}{x_2} > 1$.
Dann

$$\left|\frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2} - 1}\right| \leq 1$$

$$\Longrightarrow |\ln x_1 - \ln x_2| \leq \left|\frac{x_1}{x_2} - 1\right| = \frac{1}{|x_2|}|x_1 - x_2|$$

$$\underbrace{\leq}_{x_2 > a > 0} \frac{1}{a}|x_1 - x_2|$$

(e) analog zu 2.20(e)

Vorbemerkung: Es gilt für $a > 0$:

$a^m = \left(e^{\ln a}\right)^m = \left(\exp(\ln a)\right)^m = \exp(m \ln a) = e^{m \ln a} \ (m \in \mathbb{Z})$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\exp(\ln a)} = \exp(\frac{1}{n} \ln a) = e^{\frac{1}{n} \ln a}$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{\exp(\ln a)^m} = \sqrt[n]{\exp(m \ln a)} = \exp(\frac{1}{n} m \ln a) = e^{\frac{m}{n} \ln a}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N})$

Für andere Exponenten x definieren wir deshalb

$$a^x := e^{x \ln a} \quad (x \in \mathbb{R})$$

„Exponentialfunktion zur Basis a"

2.22 Satz *Sei $a > 0$, $b > 0$. Dann gilt*

(a)
$$\begin{array}{lcll} a^{x_1+x_2} & = & a^{x_1} \cdot a^{x_2} & (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \\ \left(a^{x_1}\right)^{x_2} & = & a^{x_1 \cdot x_2} & (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \\ (ab)^x & = & a^x b^x,\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} & (x \in \mathbb{R}) \end{array}$$

(b) *Sei $a > 1$. Dann: $x_1 > x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$* $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

Sei $0 < a < 1$. Dann: $x_1 > x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

(c) $x_n \to x \Longrightarrow a^{x_n} \to a^x$

Sei ab jetzt $a > 0$ <u>und</u> $a \neq 1$

(d) *Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto a^x$ besitzt genau eine Umkehrfunktion. (Bezeichnung: $\log_a x$ Logarithmus zur Basis a).*

Es gilt:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(e)
$$\begin{array}{lcll} \log_a(a^x) & = & x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a^{\log_a x} = x \quad (x > 0) & \\ \log_a(x_1 x_2) & = & \log_a x_1 + \log_a x_2 & (x_1, x_2 > 0) \\ \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) & = & \log_a x_1 - \log_a x_2 & (x_1, x_2 > 0) \\ \log_a\left(x_1^{x_2}\right) & = & x_2 \log_a x_1 & (x_1 > 0,\ x_2 \in \mathbb{R}) \end{array}$$

(f) $x_n > 0\ (n \in \mathbb{N}),\ x_n \to x > 0 \Longrightarrow \log_a x_n \to \log_a(x)$

(g) $a_n > 0\ (n \in \mathbb{N}),\ a_n \to a,\ b_n \to b$

$\Longrightarrow {a_n}^{b_n} \to a^b$.

Beweis: (a) $a^{x_1+x_2} = e^{(\ln a)\cdot(x_1+x_2)} = e^{x_1 \ln a + x_2 \ln a}$

$\overset{2.19c}{=} e^{x_1 \ln a} \cdot e^{x_2 \ln a} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

Restliche Aussage analog

(b) **1. Fall:** $a > 1$. Z.z. $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

$$0 < x_1 < x_2 \overset{a>1}{\Longrightarrow} \underbrace{\ln a}_{>0} \cdot x_1 < \underbrace{\ln a}_{>0} \cdot x_2 \overset{2.20c}{\Longrightarrow} \underbrace{e^{\ln a \cdot x_1}}_{a^{x_1}} < \underbrace{e^{\ln a \cdot x_2}}_{a^{x_2}}$$

2. Fall: $0 < a < 1$: Z.z. $x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

$a > 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} < 1$. Daher nach dem 1. Fall:

$$0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1}}_{\frac{1}{a^{x_1}}} < \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}}_{\frac{1}{a^{x_2}}} \text{ (nach (a))}$$

$\Longrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$

(c) $x_n \to x \Longrightarrow (\ln a) \cdot x_n \to (\ln a) \cdot x$

$$\overset{2.20e}{\Longrightarrow} \underbrace{e^{\ln a \cdot x_n}}_{a^{x_n}} \to \underbrace{e^{\ln a \cdot x}}_{a^x}$$

(d) Mit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x \ln a$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f_2(x) = e^x$
gilt $a^x = e^{x \ln a} = e^{f_1(x)} = f_2\big(f_1(x)\big) = \big(f_2 \circ f_1\big)(x)$
Da f_1 und f_2 jeweils bijektiv sind, ist nach 0.20 auch $f_2 \circ f_1$ bijektiv und besitzt die Umkehrabbildung ${f_1}^{-1} \circ {f_2}^{-1}$.

$${f_2}^{-1}(x) = \ln x, \; {f_1}^{-1}(x) = \frac{x}{\ln a}$$

$$\left[\quad \text{Wegen } f_1(x) = y \; x \ln a = y \quad x = f^{-1}(y) \; x = \frac{y}{\ln a} \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{\ln a} \quad \right]$$

$\Longrightarrow$ Die Umkehrabbildung $\log_a(x)$ exist. und es gilt $\log_a(x) = {f_1}^{-1}\big({f_2}^{-1}(x)\big) = {f_1}^{-1}(\ln x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

$$\left[\quad f_1(x) = x \ln a \text{ ist bijektiv, weil } a \neq 1, \text{ d.h. } \ln a \neq 0 \quad \right]$$

(e) $\log_a a^x = x \; (x \in \mathbb{R})$, $a^{\log_a x} = x \; (x > 0)$
ist klar nach den Eigenschaften der Umkehrfunktion (vgl. 2.21b)

$$\log_a(x_1 x_2) = \frac{\ln(x_1 x_2)}{\ln a} = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{\ln a} = \frac{\ln x_1}{\ln a} + \frac{\ln x_2}{\ln a} = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

Restliche Aussagen analog (evtl. ÜA)

(f) $x_n > 0 \; (n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x > 0 \overset{2.21e}{\Longrightarrow} \ln x_n \to \ln x$

$$\overset{a \neq 1}{\Longrightarrow} \underbrace{\frac{\ln x_n}{\ln a}}_{\log_a x_n} \to \underbrace{\frac{\ln x}{\ln a}}_{\log_a x}$$

(g) $a_n > 0 \; (n \in \mathbb{N})$, $a > 0$, $a_n \to a \Longrightarrow \ln a_n \to \ln a$
$b_n \to b$, also nach 2.5c $(\ln a_n) b_n \to (\ln a) b$

$$\overset{2.19e}{\Longrightarrow} \underbrace{e^{(\ln a_n) b_n}}_{{a_n}^{b_n}} \to \underbrace{e^{(\ln a) b}}_{a^b}$$

Bemerkung: 1. Neben $\log_e(x) = \ln x$ werden noch häufig

$$\mathrm{ld}(x) := \log_2(x) \qquad \text{„Logrithmus dualis“}$$

und

$$\lg(x) := \log_{10}(x) \qquad \text{„Zehnerlogarithmus“}$$

benutzt.
Diese sind jeweils konstante Vielfache des natürlichen Logarithmus nach 2.22d.

2. Ohne die Voraussetzung $a > 0$ kann 2.22(g) falsch sein:

$$a_n = \frac{1}{2^n},\ b_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n{}^{b_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$$

$$a_n \to 0,\ b_n \to 0,\ a_n{}^{b_n} \not\to 0^0 := 1$$

Um das Wachstumsverhalten der Exponentialfunktion und des Logarithmus allgemein zu formulieren, benötigen wir den Begriff der bestimmten Divergenz gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$.

2.23 Definition *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn*

$$\forall_{K>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0} : a_n \geq K \ (a_n \leq -K)$$

Schreibweise:

$$\begin{array}{ll} a_n \to \infty & (\textit{bzw. } a_n \to -\infty) \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty & (\textit{bzw. } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty) \end{array}$$

Bemerkung: Statt „bestimmt divergent gegen $\pm\infty$“ spricht man oft auch von „(uneigentlich) konvergent gegen $\pm\infty$“

Beispiele: Sei $k \in \mathbb{N}$

$a_n = n^k \to \infty \ (n \to \infty)$

$a_n = -(n^k) \to -\infty \ (n \to \infty)$

$a_n = (-1)^n n$ divergent, aber nicht bestimmt divergent

Bemerkung: $a > 0,\ a_n \to 0 \Longrightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty$

[**Beweis:** Sei $K > 0$, z.z. es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq K\ (n \geq n_0)$.

Wähe zu $\varepsilon := \frac{1}{K}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n \overset{a_n \geq 0}{=} |a_n - 0| < \frac{1}{K} \quad (n \geq n_0)$$

(Das ist möglich wegen $a_n \to 0\ (n \to \infty)$)

Also $\frac{1}{a_n} > K\ (n \geq n_0)$.]

Entsprechend zeigt man

$$\begin{array}{lll} a_n < 0\ (n \in \mathbb{N}),\ a_n \to 0 & \Longrightarrow & \frac{1}{a_n} \to -\infty \\ a_n \to \infty & \Longrightarrow & \frac{1}{a_n} \to 0 \\ a_n \to -\infty & \Longrightarrow & \frac{1}{a_n} \to 0 \end{array}$$

2.24 Satz

(a) Sei $a > 1$, $\beta \geq 0$. Dann gilt

$$x_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}), \ x_n \to \infty \Longrightarrow \frac{1}{{x_n}^\beta} a^{x_n} \to \infty \Longrightarrow \frac{{x_n}^\beta}{a^{x_n}} \to 0$$

[*Später schreiben wir hierfür:* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = \infty$ *bzw.* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0$]

(b) Sei $a > 1$, $\in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$x_n \to -\infty \Longrightarrow {x_n}^k \cdot a^{x_n} \to 0$$

[*Später:* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k \cdot a^x = 0$]

(c) Sei $a > 1$. Dann gilt

$$x_n \to \infty \Longrightarrow \log_a x_n \to \infty$$

[*Später:* $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$]

(d) Sei $a > 1$. Dann gilt

$$x_n > 0, \ x_n \to 0 = \log_a(x_n) \to -\infty$$

[*Später:* $\lim\limits_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty$]

(e) Sei $a > 1$, $\beta > 0$. Dann gilt

$$x_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}), \ x_n \to 0 \Longrightarrow \log_a(x_n) \cdot {x_n}^\beta \to 0$$

[*Später:* $\lim\limits_{x\to 0} x^\beta \ln x = 0$]

(f) Sei $a > 1$, $\beta > 0$. Dann gilt

$$x_n \to \infty \Longrightarrow \frac{\log_a(x_n)}{{x_n}^\beta} \to 0$$

[*Später:* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_a(x)}{x^\beta} = 0$]

Bemerkung: Auf die Formulierung entsprechender Aussagen für $0 < a < 1$ wird verzichtet, weil sie sich leicht über die Berechnungen $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ und $\log_a(x) = -\log_{\frac{1}{a}}(x)$ gewinnen lassen.

Beweis: Wegen $a^x = e^{x \ln a}$ und $\ln a > 0$ (wg. $a > 1$) reicht es, alle Aussagen nur für $a = e$ zu beweisen.

(a) z.z.: $\beta > 0,\ x_n \to \infty \Longrightarrow \frac{e^{x_n}}{{x_n}^\beta} \to \infty$
Wähle festes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \beta$.
Für $x > 1$ gilt dann $x^k \geq x^\beta$, also

$$\frac{e^x}{x^\beta} \geq \frac{e^x}{x^k} \geq \frac{\left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1}}{x^k} \geq \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}}{x^k} = \frac{x}{(k+1)^{k+1}}$$

$$x_n \to \infty \Longrightarrow \frac{x_n}{(k+1)^{k+1}} \to \infty \Longrightarrow \frac{e^{x_n}}{x^\beta} \to \infty$$

(b) Aus (a) folgt

$$\begin{aligned} && \tfrac{e^x}{x^k} &\geq \tfrac{x}{(k+1)^{k+1}} && (x > 1) \\ &\Longrightarrow & \tfrac{x^k}{e^x} &\leq \tfrac{1}{x} \cdot (k+1)^{k+1} && (x > 1) \\ &\Longrightarrow & e^{-x}|x|^k &\leq \tfrac{1}{|x|}(k+1)^{k+1} && (x > 1) \end{aligned}$$

Ersetze x durch $-x$. Dann erhält man

$$e^x \cdot |x|^k \leq \tfrac{1}{|x|}(k+1)^{k+1} \quad (x < -1)$$

Also $x_n \to -\infty$ folgt $e^{x_n} \cdot |x_n|^k \to 0$

$$\stackrel{2.4(a)}{\Longrightarrow} e^{x_n}{x_n}^k \to 0.$$

(c) z.z.: $x_n \to \infty \Rightarrow \ln x_n \to \infty$,
d. h. zu $K > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\ln x_n \geq K \quad (n \geq n_0)$$

Sei $K > 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$x_n \geq e^K \ (n \geq n_0) \qquad (\text{wg. } x_n \to \infty)$$

Nach 2.21c folgt

$$\ln x_n \geq \ln e^K = K \quad (n \geq n_0).$$

(d) z.z.: $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to 0 \Longrightarrow \ln x_n \to -\infty$

$$\begin{aligned} x_n \to \infty,\ x_n > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \tfrac{1}{x_n} > 0,\ \tfrac{1}{x_n} \to 0 \\ &\overset{(c)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\ln\left(\tfrac{1}{x_n}\right)}_{-\ln x} \to \infty \\ &\Longrightarrow \quad \ln x_n \to -\infty. \end{aligned}$$

(e) z.z.: $x_n > 0,\ x_n \to 0,\ \beta > 0 \Longrightarrow {x_n}^{\beta} \ln x_n \to 0$
[nach (f)]: Wende (f) auf $\frac{1}{x_n}$ an.

(f) z.z.: $\beta > 0,\ x_n \to \infty \Longrightarrow \frac{\ln x_n}{{x_n}^{\beta}} \to 0$

$$x_n \to \infty \underset{(c)}{\overset{\beta>0}{\Longrightarrow}} \underbrace{\beta \ln x_n}_{y_n} \to \infty \overset{(a)}{\Longrightarrow} \frac{y_n}{e^{y_n}} \to 0$$

d. h.

$$\frac{\beta \ln x_n}{e^{\beta \ln x_n}} \to 0 \Longrightarrow \frac{\beta \ln x_n}{{x_n}^{\beta}} \to 0 \overset{\beta>0}{\Longrightarrow} \frac{\ln x_n}{{x_n}^{\beta}} \to 0$$

Bemerkung: Die Grenzwertsätze 2.5 und 2.6 wurden unter der Voraussetzung $a_n \to a$, $b_n \to b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ (d.h. $a, b \neq +\infty, -\infty$) bewiesen.

Sie gelten für $a \in \{-\infty, \infty\}$ und $b \in \{-\infty, \infty\}$ nur eingeschränkt.

Gelegentlich wird eine Erweiterung $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ von $\mathbb{R}$ betrachtet.

2.25 Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$ *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und die Operatoren $+, -, \cdot, /$ gelten die bisher bekannten Regeln. Hierzu kommen:*

$$a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\underbrace{a + (-\infty)}_{a-\infty:=} = -\infty + a = \underbrace{-\infty + (-\infty)}_{-\infty-\infty:=} = -\infty \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty (a \in \mathbb{R}, a > 0)$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty (a \in \mathbb{R}, a > 0)$$

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0 \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

$$-\infty < a < \infty$$

Diese Rechenregeln sind dadurch motiviert, dass entsprechende Aussagen für konvergente bzw. bestimmt divergente Folgen gelten, z.B.

$$\begin{aligned} a_n \to a,\ b_n \to \infty &\implies a_n + b_n \to \infty \\ a_n \to a,\ b_n \to \infty &\implies b_n + a_n \to \infty \\ a_n \to \infty,\ b_n \to \infty &\implies a_n + b_n \to \infty \end{aligned}$$

Nicht definiert sind dagegen z. B.

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty},$$

weil sich leicht Beispiele bestimmen lassen, die unterschiedliche Ergebnisse liefern:

$$a_n = n,\ b_n \begin{cases} n \\ 2n \\ \frac{n}{2} \end{cases} \implies a_n - b_n = \begin{cases} 0 & \to 0 \\ -n & \to -\infty \\ \frac{n}{2} & \to +\infty \end{cases}$$

$$a_n = n,\ b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases} \implies a_n \cdot b_n = \begin{cases} 1 & \to 1 \\ \frac{1}{n} & \to 0 \\ \sqrt{n} & \to \infty \end{cases}$$

<u>Nicht</u> definiert wurde $\frac{a}{0}$ für $a \neq 0$, weil $0 = -0$ gilt und z. B. die Definition $\frac{1}{0} = \infty$ bei Gültigkeit von $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ den Widerspruch $\infty = \frac{1}{0} = \frac{1}{-0} = -\frac{1}{0} = -\infty$ nach sich ziehen würde.
Wir werden von den Rechenregeln 2.25 <u>keinen Gebrauch</u> machen, sondern uns die entsprechende Aussagen jeweils bei Bedarf überlegen.
Die Rechenregeln 2.25 wurden vorgestellt, weil die heute gebräuchliche Gleitpunktarithmetik (IEEE-754) mit einer Abweichung eine Annäherung an $\overline{\mathbb{R}}$ darstellt. Die Abweichung besteht darin, dass zwischen $+0$ und -0 unterschieden wird. Damit wird definiert

$$\frac{a}{+0} = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0 \\ -\infty & \text{für } a < 0 \end{cases}, \quad \frac{a}{-0} = \begin{cases} -\infty & \text{für } a > 0 \\ +\infty & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

(Besonderheiten:
Im Gleitpunktstandard wird $+0 = -0$ für <u>Vergleiche</u> festgelegt, ebenso $\sqrt{+0} := +0$, $\sqrt{-0} := -0$ usw.)

Schreibweisen: Sei $a \in \mathbb{R}$:

$(-\infty, \infty)$	$:=$	$\mathbb{R}$	
$(-\infty, a]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	unbeschränktes, abgeschlossenes Intervall
$(-\infty, a)$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$	unbeschränkte offene Intervalle
$[a, \infty)$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	
(a, ∞)	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	unberschränktes, abgeschlossenes Intervall

2.26 Definition (Cauchyfolge) *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt Cauchyfolge, wenn*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

2.27 Satz (Cauchykriterium für Folgen) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert} \iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ Cauchyfolge}$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $a_n \to a$ und $\varepsilon > 0$.

Zur positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{2}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq N)$$

Also gilt auch

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m \geq N)$$

Daher

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (m, n \geq N)$$

„$\Leftarrow$": Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge und $\varepsilon > 0$.

1. Zeige: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt
   Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass
   $$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad (m, n \geq N)$$
   Insbesondere: $|a_n - a_N| < \varepsilon$, daher $|a_n| \leq |a_N| + |a_n - a_N| < |a_N| + \varepsilon$
2. Somit existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $$a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$
   Somit gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass
   $$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k \geq k_0)$$
   Insbesondere gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $n_\ell \geq N$, so dass
   $$|a_{n_\ell} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$
   Dann
   $$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_\ell}| + |a_{n_\ell} - a| \overset{(*),(**)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n \geq N)$$

Bemerkung:

1. Der Nachweis der Konvergenz über das Cauchykriterium hat den Vorteil, dass der Folgengrenzwert nicht bekannt sein muss.
2. Äquivalenz zum Vollständigkeitsaxiom (V1) ist die Forderung, dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$konvergiert.

§ 3. Reihen

3.1 Definition *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ heißt unendliche Reihe und wird mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.*

[*$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ steht sowohl für $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch für $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, wenn dieser Grenzwert existiert.*]

Bemerkung: Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich auch als Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ schreiben, nämlich $a_1 := x_1,\ a_{k+1} := x_{k+1} - x_k\ (k \in \mathbb{N})$.

Beispiele: (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$:

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}\ (q \neq 1)$

$s_n \to \frac{1}{1-q}\quad (n \to \infty)$ falls $|q| < 1$,

d. h. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ falls $|q| < 1$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ ist divergent für $|q| \geq 1$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vlg. Übungen}}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1\ (n \to \infty)$$, also

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$:

Nach 2.19(a) gilt $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to e\ (n \to \infty)$,

also folgt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$: „harmonische Reihe“

Diese Reihe ist divergent wegen

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} \tfrac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \tfrac{1}{k} + \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \tfrac{1}{k} \\
&= s_{2^{n-1}} + \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \tfrac{1}{k} \\
&\geq s_{2^{n-1}} + \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \tfrac{1}{2^n} \quad [2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}] \\
&= s_{2^{n-1}} + 2^{n-1} \cdot \tfrac{1}{2^n} = s_{2^{n-1}} + \tfrac{1}{2} \\
s_{2^0} &= s_1 = \sum_{k=1}^{1} \tfrac{1}{k} = 1.
\end{aligned}$$

Daher konvergiert die Teilfolge $(s_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht (bestimmte Divergenz gegen $+\infty$).

3.2 Satz *Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$ konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\left[\quad (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) + (b_1 + b_2 + \ldots) \overset{?}{=} a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots \quad \right]$$

Beweis:

$$\begin{array}{ccccc}
\sum\limits_{k=1}^{n} a_k & + & \sum\limits_{k=1}^{n} b_k & = & \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \quad (n \in \mathbb{N}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \\
\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k & & \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k & &
\end{array}$$

Also

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ (n \to \infty)$$

Analog: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Bemerkung: Es gilt im Allgemeinen <u>nicht</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent } \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \text{ konvergent}$$

Gegenbeispiel: Nach dem noch zu besprechenden Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$, aber $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\frac{1}{k}}$ divergent (Bsp. (d) nach 3.1)

3.3 Satz (Cauchykriterium für Reihen) *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine unendliche reihe. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ konv.} \iff \forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n\geq m\geq N} : \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

Beweis: Das folgt direkt aus dem Cauchykriterium 2.27 für Folgen, denn:

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Bemerkung: Das Konvergenz<u>verhalten</u> einer Reihe ändert sich nicht, wenn endlich viele Glieder abgeändert werden.
(Wählt man ein Cauchykriterium N größer als der Index aller geänderten Glieder, so treten in $\sum_{k=m}^{n} a_k$ für $n \geq m \geq N$ keine geänderten Glieder mehr auf.)

3.4 Folgerung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ konvergent } \Longrightarrow a_k \to 0 \ (k \to \infty)$$

Beweis: Aus dem Cauchykriterium 3.3 folgt mit $m = n$ unmittelbar

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N} : |a_n| < \varepsilon,$$

d. h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht:

$$\frac{1}{k} \to 0 \ (k \to \infty), \text{ aber } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergiert.}$$

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ divergiert, weil $(-1)^k \not\to 0$.

3.5 Satz *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N})$.
Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ beschränkt (d. h. } \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt)} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert}$$

Beweis: $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist wegen $a_k \geq 0$ eine monoton wachsende Folge.

„$\Longrightarrow$" ergibt sich dann sofort aus 2.15.

„$\Longleftarrow$" erhält man aus 2.2(a)

3.6 Definition und Satz *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* *<u>absolut konvergent</u>, wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert. In diesem Fall ist sie auch konvergent, und es gilt*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, gibt es nach dem Cauchykriterium 3.3 ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Somit

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

Also ist nach dem Cauchykriterium 3.3 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

$$\begin{array}{ccc}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| & \leq & \sum_{k=1}^{n} |a_k| \\
\big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\
\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| & \leq & \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|
\end{array}$$

3.7 Majorantenkriterium *Sei* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *eine konvergente Reihe mit* $c_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N})$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $|a_k| \leq c_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

Beweis: $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent, ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ nach 3.5 beschränkt. Also ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ beschränkt und nach 3.5 konvergent. Damit ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und es gilt

$$\begin{array}{ccccc} \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| & \leq & \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| & \leq & \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right| & & & & \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \end{array}$$

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ ist konvergent für $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

Beweis: $0 \leq \frac{1}{k^m} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$

Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \left(= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \right)$ [Bsp. (b) nach 3.1] folgt die Konvergenz von $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und damit die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ $(m \geq 2, m \in \mathbb{N})$

3.8 Quotientenkriterium *Sei* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$. *Dann gilt*

(a) $\left(\exists_{q\in\mathbb{R}} : 0 < q < 1 \wedge \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}\right)$

$\Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

(b) $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}\right)$

$\Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent*

Beweis: (a) ohne Einschränkung der Allgemeinheit: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q < 1$ ($k \in \mathbb{N}$), weil das Abändern endlich vieler Folgeglieder das Konvergenzverhalten der Reihe nicht ändert.
Somit $|a_k| \le q|a_{k-1}| \le q^2|a_{k-2}| \le \ldots \le q^{k-1}|a_1|$ ($k \in \mathbb{N}$).
Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \cdot |a_1|$ konvergent ist (gem. Reihe mit $|q| < 1$ und 3.2), konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nach dem Majorantenkriterium.

(b) ohne Einschränkung der Allgemeinheit: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1$ ($k \in \mathbb{N}$), also $|a_k| \ge |a_{k-1}| \ge \ldots \ge |a_1| \ne 0$.
Somit ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und daher $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nach 3.4 divergent.

3.9 Satz (Exponentialreihe) *Die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *ist für* $x \in \mathbb{R}$ *absolut konvergent und es gilt*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Beweis: Die Behauptung ist klar für $x = 0$.
Sei $x \ne 0$.

$$\left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \left|\frac{x}{k+1}\right| = \frac{|x|}{k+1} \overset{\overset{k\ge|x|}{\downarrow}}{\le} \underbrace{\frac{|x|}{|x|+1}}_{q:=}(<1) \quad (k \in \mathbb{N}, k \ge |x|)$$

Also konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ nach dem Quotientenkriterium absolut.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{analog zum} \\ \text{Beweis von} \\ \text{2.19(a)}}}{=} \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1-\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right)\right)\right| \\
&\le \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^k}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \overset{\text{ÜA 18c}}{\le} \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^k}{k!}\frac{k(k-1)}{2n} \\
&= \frac{|x|^2}{2n} \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!} = \frac{|x|^2}{2n} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^k}{k!}}_{<\infty \text{ weil } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ absolut konvergent}} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

$$\text{Also } \Big| \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{\downarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} - \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{\downarrow\; e^x \text{ (2.19(a))}} \Big| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Bemerkung:

1. Das Quotientenkriterium ist lediglich hinreichend, aber nicht notwendig für die Konvergenz einer Reihe:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergent, aber } \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} \to \infty \ (k \to \infty)$$
2. Das Quotientenkriterium hat den Nachteil, dass fast alle $a_k \neq 0$ sein müssen.

3.10 Wurzelkriterium *Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann gilt*

(a) $\left(\exists_{q\in\mathbb{R}} : 0 < q < 1 : \sqrt[k]{|a_k|} \leq q \text{ für fast alle } k\right)$
$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

(b) $\left(\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } k\right)$
$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$$

Beweis:

(a) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit: $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ $(k \in \mathbb{N})$ Daher $|a_k| \leq q^k$ und somit ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent nach dem Majorantenkriterium.

(b) $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele k, also $|a_k| \geq 1$ für unendlich viele k, und daher ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge (weil sie eine Teilfolge beinhaltet, die nicht gegen 0 konvergiert).

Also ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nach 3.4 divergent.

Bemerkung:

1. Ist das Quotientenkriterium erfüllt, dann auch das Wurzelkriterium: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ erfüllt das Quotientenkriterium für alle $k \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow |a_k| \leq q|a_{k-1}| \leq \ldots \leq q^{k-1}|a_1|$
$\Longrightarrow \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{q^k|a_1|}{q}} = q \underbrace{\sqrt[k]{\frac{|a_1|}{q}}}_{\to 1 \ (k\to\infty)} \to q < 1$

Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q + \varepsilon \quad (k \geq k_0)$$

Man kann ε so klein wählen, dass $q + \varepsilon < 1$ (z. B. $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$)

2. Es gibt Reihen, die nach dem Wurzelkriterium, aber nicht nach dem Quotientenkriterium konvergieren: $q^2+q^1+q^4+q^3+q^5+q^6$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, aber nicht nach dem Quotientenkriterium.

Beispiel: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium (direkter Nachweis)

$$\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = |x| \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = \frac{|x|}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{k!}{k^k}}} \to 0 \ (k \to \infty),$$

$$\left[\quad \sqrt[k]{\frac{k!}{k^k}} \to \frac{1}{e} \text{ (nach ÜA)} \quad \right]$$

also gibt es ein $q < 1$, so dass

$$\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} \leq q < 1 \text{ für fast alle } k.$$

3.11 Leibnizkriterium *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge (also insbesondere $a_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N}_0)$). Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$.*

Beweis:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$

$$s_{n+2} - s_n = \underbrace{(-1)^{n+2}}_{=(-1)^n} a_{n+2} + \underbrace{(-1)^{n+1}}_{-(-1)^n} a_{n+1} =$$

$$= (-1)^n \underbrace{\left(a_{n+2} - a_{n+1}\right)}_{\leq 0 \text{ wg. } (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ mon. fallend}} = \begin{cases} \leq 0 & n \text{ gerade} \\ \geq 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

also $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.

$$s_{2n+1} - s_{2n} = \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{-1} \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} \leq 0 \ (n \in \mathbb{N}_0) \qquad (*)$$

Behauptung: Die Intervalle $I_n := [s_{2n+1}, s_{2n}]$ bilden eine Intervallschachtelung.

- $$\underset{\substack{(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}\\ \text{mon. wachsend}}}{s_{2n-1} \leq s_{2n+1}} \overset{(*)}{\leq} \underset{\substack{(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}\\ \text{mon. fallend}}}{s_{2n} \leq s_{2n-2}}$$
  daher $I_{n-1} = [s_{2n-1}, s_{2n-2}] \supset [s_{2n+1}, s_{2n}] = I_n$
- $$\begin{aligned} |I_n| &= s_{2n} - s_{2n+1} = -(s_{2n+1} - s_{2n}) \\ &= -\big(\underbrace{(-1)^{2n+1}}_{-1} a_{2n+1}\big) = a_{2n+1} \to 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom gibt es $s \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_0} I_n$.

$$\begin{aligned} s \in I_n &\implies \underbrace{s_{2n+1}}_{\text{mon. wachs.}} \leq s \leq \underbrace{s_{2n}}_{\text{mon. fall.}} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ &\implies \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} \leq s \leq \lim_{n\to\infty} s_{2n} \end{aligned}$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(s_{2n} - s_{2n+1})}_{|I_n|} = 0$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

[Letzteres, weil in jeder ε-Umgebung von s fast alle Glieder von $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und fast alle Glieder von $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ liegen. Somit auch fast alle Glieder von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.]

Bemerkung: (a) Es gilt: $|s - s_n| = \left| \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$

Beweis: 1. Fall: n gerade, d. h. $n = 2m$

$$s \in \underbrace{I_m}_{=[s_{2m+1}, s_{2m}]} \ (\text{weil } s \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} I_k)$$

$$\implies |s - \underbrace{s_{2m}}_{s_n}| \leq |I_n| = |(-1)^{2n+1} a_{2m+1}| = \underbrace{a_{2m+1}}_{a_{n+1}}$$

2. Fall: n ungerade, d. h. $n = 2m - 1$

$$s \in I_m = [s_{2m+1}, s_{2m}] \underset{\substack{(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}\\ \text{mon. wachsend}}}{\subset} [s_{2m-1}, s_{2m}]$$

$$\implies |s - \underbrace{s_{2m-1}}_{s_n}| \leq |s_{2m} - s_{2m-1} = |(-1)^{2m} a_{2m}| = \underbrace{a_{2m}}_{a_{n+1}}$$

(b) Die Konvergenzaussage des Leibnizkriteriums gilt für jede Reihe $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} b_k$,

für die
$$\begin{array}{lll} b_k \cdot b_{k+1} \leq 0 & (k \geq k_0) & \text{„alternierend“} \\ |b_k| \geq |b_{k+1}| & (k \geq k_0) & \text{„Beträge der Reihenglieder mon. fallend“} \\ b_k \to 0 & (k \to \infty) & \text{„Reihenglieder bilden Nullfolge“} \end{array}$$
erfüllt ist.

Beispiele: (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, aber nicht absolut
[weil $\left|(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}\right| \geq \frac{1}{k}$].

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, aber nicht absolut.

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ ($= \frac{\pi}{4}$ später) konvergiert nach dem Leibnizkriterium, aber nicht absolut.

3.12 Umordnungssatz *Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolute konvergente Reihe, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann ist auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$$

Beweis: 1. Sei zunächst $a_k \geq 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Weil σ injektiv ist, sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ paarweise verschieden und es folgt

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{\ell=1}^{\max(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} a_\ell \leq \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} a_k}_{=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k} \ (< \infty)$$

Daher ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und es ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Derselbe Schluss lässt sich auch auf die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ und die Umordnung $\sigma^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ anwenden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_{\sigma^{-1}(\sigma(k))}}_{a_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$$

Also: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

2. Der allgemeine Fall wird durch die Zerlegung

$$a_k = \underbrace{\frac{1}{2}\big(|a_k| + a_k\big)}_{b_k} - \underbrace{\frac{1}{2}\big(|a_k| - a_k\big)}_{c_k}$$

auf 1. zurückgeführt.

Wegen $b_k \geq 0, c_k \geq 0$ und $b_k \leq |a_k|, c_k \leq |a_k|$ sind $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt nach 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \ \sum_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)}, \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)}$ konvergente Reihen sind, gilt das nach 3.2 auch für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{(b_{\sigma(k)} + c_{\sigma(k)})}_{|a_{\sigma(k)}|}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{(b_{\sigma(k)} - c_{\sigma(k)})}_{a_{\sigma(k)}}$.

Somit ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(b_{\sigma(k)} - c_{\sigma(k)}\big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)} \overset{1.}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - c_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Bemerkung: Für <u>nicht</u> absolut konvergente Reihen gilt der Umordnungssatz im allgemeinen <u>nicht</u>.

Nach Riemann gilt sogar folgende Aussage: Jede konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe kann so umgeordnet werden, dass sie gegen eine beliebig vorgegebene Zahl konvergiert.

3.13 Satz (Cauchyprodukt) *Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k, \ \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen.*

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $c_k := \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$.

Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{c_k}_{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}}$$

$$\left[\quad \textit{Merkregel:} \ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k}} a_i b_j \quad \right]$$

Beweis: Idee: Betrachte

$$\begin{array}{ccc} a_0 \cdot b_0 & a_0 \cdot b_1 & a_0 \cdot b_2 \\ a_1 \cdot b_0 & a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 \\ a_2 \cdot b_0 & a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 \end{array}$$

Bilde daraus die Hilfsfolge $(d_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0} = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$

$$\begin{array}{ccccc} d_0 & d_3 & d_8 & \cdots & d_{(n+1)^2-1} \\ d_1 & d_2 & d_7 & \cdots & \vdots \\ d_4 & d_5 & d_6 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n^2} & d_{n^2+1} & \cdots & \cdots & . \end{array}$$

Wir zeigen, dass $\sum\limits_{\ell=0}^{\infty} d_\ell$ absolut konvergiert:

$$\sum_{\ell=0}^{(n+1)^2-1} |d_\ell| = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} |a_i b_j| = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot \sum_{j=0}^{n} |b_j| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$$

Also konvergiert $\sum\limits_{\ell=0}^{\infty} d_\ell$ und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{(n+1)^2-1} d_\ell = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_j \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j \end{aligned}$$

Wir betrachten folgende Umordnung der Reihe $\sum\limits_{\ell}^{\infty} d_\ell$, die sich durch den Durchlauf durch das obige Tableau entlang der eingezeichneten Linien ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} d_{\sigma(0)} & & d_{\sigma(2)} & & d_{\sigma(5)} & & d_{\sigma\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right)} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ d_{\sigma(1)} & & d_{\sigma(4)} & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ d_{\sigma(3)} & & & \nearrow & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ d_{\sigma\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)} & & & & & & \end{array}$$

d. h. $\sigma(0) = 0,\ \sigma(1) = 1,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 2,\ \sigma(5) = 8,\ \ldots$

Nach dem Umordnungsgesetz gilt

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} d_{\sigma(\ell)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} d_{\sigma(\ell)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Bemerkung: Auch beim Cauchy-Produkt kann auf die Voraussetzung absolute Konvergenz im allgemeinen nicht verzichtet werden:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \right)}_{\substack{\text{konvergiert} \\ \text{nach dem} \\ \text{Leibnizkrit.}}} < \infty$$

$$\begin{aligned}
|c_k| &= \left| \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}} \cdot \frac{(-1)^{k-i}}{\sqrt{(k-i)+1}} \right| \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{i+1}\sqrt{k-i+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ungl. von} \\ \text{arithm.-geom.} \\ \text{Mittel}}}{\geq} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\frac{(i+1)+(k-i+1)}{2}} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{2}{k+2} = 2 \cdot \frac{k+1}{k+2} \to 2 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

Wegen $c_k \not\to 0$ kann $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ <u>nicht</u> konvergent sein.

3.14 Additionstheorem *Für die Funktionen* $\sin(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ *und* $\cos(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ $(x \in \mathbb{R})$ *gilt*

(a) $\sin(-x) = -\sin(x),\ \cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

(c) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

(d) $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \quad (x\in\mathbb{R})$

(e) $\sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

(f) $\cos x-\cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Beweis: Beide Reihen sind absolut konvergent für $x\in\mathbb{R}$, dann:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \le \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{|x|^\ell}{\ell!} = e^{|x|}$$

Entsprechend für $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right|$.

(a) $\sin(-x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\overbrace{(-1)^{2k+1}}^{-1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$= -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x)$
$\cos(-x)=\cos(x)$ analog.

(b) $\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cauchy-}\\ \text{Produkt}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i\cdot x^{2i+1}}{(2i+1)!}\cdot\frac{(-1)^{k-i}y^{2(k-1)}}{(2(k-i))!} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}\cdot\frac{(-1)^{k-i}y^{2(k-i)+1}}{(2(k-i)+1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\underbrace{\frac{(-1)^k\cdot x^{2i+1}y^{2k+1-(2i+1)}}{(2i+1)!\cdot(2k+1-(2i+1))!}}_{a_{2i+1\,k}} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\underbrace{\frac{(-1)^k x^{2i}y^{2k+1-2i}}{(2i)!\cdot(2k+1-2i)!}}_{a_{2i\,k}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}a_{2i+1\,k}+\sum_{i=0}^{k}a_{2i\,k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k+1}a_{i\,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k+1}\frac{(-1)^k x^i y^{(2k+1)-i}}{i!(2k+1-i)!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{i=0}^{2k+1}\frac{(2k+1)!}{i!(2k+1-i)!}x^i y^{(2k+1)-i}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{i=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{i}x^i y^{(2k+1)-i} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Binom. Satz}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x+y)^{2k+1}\\
&= \sin(x+y)
\end{aligned}$$

(c) Analog.

(d) Nach (c) $\underbrace{\cos(0)}_{1} = \cos(x-x) = \cos x\cdot\cos(-x)-\sin(x)\cdot\sin(-x) \overset{(a)}{=}$
$\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x) = \cos^2 x+\sin^2 x$

(e) Aus (b) folgt:

$$\begin{aligned}\sin(u+v) &= \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v\\ \sin(u-v) &= \sin u \cdot \cos(-v) + \cos u \cdot \sin(-v)\\ &= \sin u \cdot \cos v - \cos u \sin v\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \sin(u+v) - \sin(u-v) = 2\cos u \cdot \sin v \quad (u, v \in \mathbb{R})$

Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Mit $u := \frac{x+y}{2}$, $v := \frac{x-y}{2}$ folgt $u+v = x$ und $u-v = y$, somit

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

(f) ÜA

Um die Periodizität der trigonometrischen Funktionen zu beweisen, benötigen wir den Teil (a) von

3.15 Hilfssatz

(a) Die Funktionen sin *und* cos *sind auf beschränkten Intervallen lipschitzstetig.*

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0,\ x_n \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$
$\Longrightarrow \dfrac{\sin x_n}{x_n} \to 1,\ \dfrac{\cos(x_n) - 1}{x_n} \to 0$

[*Hierfür schreiben wir später:* $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x\neq 0}} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$]

3.16 Satz und Definition *Die Funktion* cos *hat genau eine Nullstelle im Intervall* $[0, 2]$ *(Bezeichnung:* $\frac{\pi}{2}$*). Damit gilt:*

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Beweis: 1. Zeige: $\overbrace{x - \frac{x^3}{6}}^{s_1(x)} \leq \sin x \leq \overbrace{x}^{s_0(x)} \quad (x \in [0, 2])$

Die Beträge der Reihenglieder $(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ sind monoton fallend für $x \in [0, 2]$ und konvergieren gegen 0 für $k \to \infty$.

[Denn:

$$\left| \frac{(-1)^{k+1} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}}{(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} \right| = \frac{x^2}{(2k+3)\cdot(2k+2)} \overset{k\geq 0}{\leq} \frac{x^2}{6} \overset{x\in[0,2]}{\leq} \frac{2}{3} < 1$$]

$\lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = 0$, weil die Sinusreihe konvergiert.

Die Einschließung $s_1(x) \leq \sin(x) \leq s_0(x)$ $(x \in [0,2])$ folgt dann aus dem Beweis des Leibnitzkriteriums.
noch zu zeigen: $\sin(x) > 0 \quad (x \in]0,2])$

$$\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6} = \underbrace{x}_{>0}\Big(1 - \underbrace{\frac{x^2}{6}}_{\leq \frac{2}{3}}\Big) > x \cdot \frac{1}{3} > 0 \quad (0 < x \leq 2)$$

2. Zeige: $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad (x \in [0,2])$
   Beweis analog durch Betrachtung der Reihe von

$$\cos x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

[Betrachtung der Reihe $\cos x - 1$ an der Stelle von $\cos x$, weil bei der letzteren nicht $1 \geq \left|\frac{(-1)^1 x^2}{2!}\right|$ $(x \in [0,2])$ gilt.]

3. Zeige: cos ist streng monoton fallend in $[0,2]$, also insbesondere injektiv.
   Nach 3.14f gilt für $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$

$$\begin{aligned} \cos x_1 - \cos x_2 &\underset{\overset{\uparrow}{3.14f}}{=} -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \\ &= 2 \cdot \sin \underbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}_{\in(0,2]} \cdot \sin \underbrace{\frac{x_1 - x_2}{2}}_{\in(0,2]} \overset{1.}{>} 0 \end{aligned}$$

   Aus 3. ergibt sich, dass cos in $[0,2]$ höchstens eine Nullstelle besitzt.

4. Zeige: cos besitzt in $[0,2]$ mindestens eine Nullstelle.
   cos ist nach dem Hilfssatz 3.15a lipschitzstetig auf $[0,2]$,

$$\cos 0 = 1, \ \cos 2 \overset{2.}{\leq} 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0.$$

   Die Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz.
   Aus 3. und 4. ergibt sich $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

5. Zeige: $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
   Nach 3.14d gilt

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{2}}_{0} = 1$$

   Nach 1. ist $\sin \pi 2 > 0$, weil $\frac{\pi}{2} \in [0,2]$, also folgt $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

3.17 Folgerung

(a) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x),\ \cos(x + 2\pi) = \cos(x)\ (x \in \mathbb{R})$

(b) $\sin(x + \pi) = -\sin(x),\ \cos(x + \pi) = -\cos(x)\ (x \in \mathbb{R})$

(c) $\sin\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = \cos(x),\ \cos\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = \sin(x)\ (x \in \mathbb{R})$

(d)
$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} :\ \sin x = 0\} &= \{k \cdot \pi :\ k \in \mathbb{Z}\} \\ \{x \in \mathbb{R} :\ \cos x = 0\} &= \{(k + \tfrac{1}{2})\pi :\ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Beweis: (c)
$$\sin\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big) = \sin\big(\tfrac{\pi}{2} + (-x)\big) \overset{\substack{3.14b \\ 3.16}}{=} \underbrace{\sin \tfrac{\pi}{2}}_{1} \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} + \underbrace{\cos \tfrac{\pi}{2}}_{0} \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{-\sin x}$$
$$= \cos x\ (x \in \mathbb{R})$$
$$\cos\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big) = \cos\big(\tfrac{\pi}{2} + (-x)\big) = \underbrace{\cos \tfrac{\pi}{2}}_{0} \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} - \underbrace{\sin \tfrac{\pi}{2}}_{1} \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{-\sin x}$$
$$= \sin x\ (x \in \mathbb{R})$$

(b) Setze in (c) $x = \pi$:
$$\cos \pi = \sin\big(\tfrac{\pi}{2} - \pi\big) = \sin\big(-\tfrac{\pi}{2}\big) = -\sin\big(\tfrac{\pi}{2}\big) \overset{3.16}{=} -1$$
$$\sin \pi = \cos\big(\tfrac{\pi}{2} - \pi\big) = \cos\big(-\tfrac{\pi}{2}\big) = \cos\big(\tfrac{\pi}{2}\big) = 0$$
$$\sin(x + \pi) = \sin x \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \cos x \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} = -\sin x\ (x \in \mathbb{R})$$
$$\cos(x + \pi) = \cos x \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} - \sin x \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} = -\cos x\ (x \in \mathbb{R})$$

(a)
$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin(x + \pi + \pi) \overset{(b)}{=} -\sin(x + \pi) \overset{(b)}{=} -\big(-\sin(x)\big) \\ &= \sin x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \sin(x + \pi + \pi) \overset{(b)}{=} -\cos(x + \pi) \overset{(b)}{=} -\big(-\cos(x)\big) \\ &= \cos x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(d) Nach 3.16 gilt $\sin(x) > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$, weil $\frac{\pi}{2} \leq 2$.

Daher $\cos(x) \overset{(c)}{=} \sin\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = -\sin\big(x - \frac{\pi}{2}\big) < 0\ \big(\frac{\pi}{2} < x \leq \pi\big)$.
Somit hat cos in $[0, \pi]$ nur die Nullstelle $\frac{\pi}{2}$.
Aus (b) folgt dann die Nullstellenaussage von (d) für cos. Wegen $\sin(x) = \cos\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = \cos\big(x - \frac{\pi}{2}\big)$ dann hieraus auch für sin.

Potenzreihen

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Unter einer Potenzreihe verstehen wir die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Beispiel:

$$a_k = \frac{1}{k!} \qquad \text{„Exponentialreihe“}$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2\ell \ (\ell \in \mathbb{N}_0) \\ (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} & \text{für } k = 2\ell + 1 \ (\ell \in \mathbb{N}_0) \end{cases} \qquad \text{„Sinusreihe“}$$

$$a_k = 1 \qquad \text{„geometrische Reihe“}$$

Während die ersten beiden Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergieren, konvergiert die geometrische Reihe nur für $|x| < 1$ (absolut).
Ziel ist die Herleitung einer Formel, die nur die Koeffizienten a_k enthält und das Konvergenzverhalten der Potenzreihe beschreibt.

Hierfür benötigen wir den Begriff des größten und kleinsten Häufungspunkts einer beschränkten Folge, dessen Existenz sich ergibt aus dem

3.18 Satz von Bolzano-Weierstraß (3. Fassung) *Jede beschränkte Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt einen kleinsten und einen größten Häufungspunkt.*

(Bezeichnung: $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k$ *„limes inferior“*
$\limsup\limits_{k\to\infty} a_k$ *„limes superior“)*

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt: Fast alle a_k liegen im Intervall

$$\left]\liminf_{k\to\infty} a_k - \varepsilon,\ \limsup_{k\to\infty} a_k + \varepsilon\right[$$

Beweis: Eine genauere Betrachtung des Beweises der ersten Fassung des Satzes von Bolzano-Weierstraß (2.10) zeigt, dass der bei der dort gewählten Intervallschachtelung $I_n = [A_n, B_n]$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ nur endlich viele Folgenglieder kleiner als A_n sind.

(Das liegt daran, dass bei jeder Intervallschachtelung das rechte Teilintervall nur dann gewählt wird, wenn vom linken Teilintervall nur endlich viele a_k liegen. Dadurch kommen in jedem Halbierungsschritt höchstens endlich viele a_k hinzu, die kleiner als die neue untere Teilintervallgrenze sind.

Anfänglich liegen überhaupt keine Folgenglieder außerhalb von I_0.)

Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen $I_{n+1} \in I_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ monoton wachsend und konvergiert gegen $a \in \bigcap\limits_{I\in\mathbb{N}_0} I_n$ (vgl. Beweis zu 2.10)

a ist Häufungspunkt von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ (siehe Beweis zu 2.10)

Annahme: $a - \varepsilon$ ist Häufungspunkt von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$

Da in jeder Umgebung von $a - \varepsilon$ unendlich viele a_k liegen, gibt es unendlich viele a_k mit $a_k \leq a - \frac{\varepsilon}{2}$

Wegen $A_n \to a$ $(n \to \infty)$ gibt es $n \in \mathbb{N}$, so dass $A_n \geq a - \frac{\varepsilon}{2}$

Nach Konstruktion gilt $a_k < A_n$ aber nur für höchstens endlich viele k. Widerspruch!

Also ist a der kleinste Häufungspunkt von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Mit derselben Argumentation folgt auch, dass nur für höchstens endlich viele k $a_k \le a - \varepsilon$ gelten kann.

Eine naheliegende Abänderung der Intervallschachtelung liefert entsprechend lim sup.

Beispiel: $a_k = \cos\frac{\pi}{3}k + (-1)^k + (-\frac{1}{2})^k$

Wegen $|a_k| \le \underbrace{|\cos\frac{\pi}{3}k|}_{\le 1} + 1 + 1 \le 3$ ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.

$$\liminf_{k\to\infty} a_k = -2 \qquad \limsup_{k\to\infty} a_k = 2$$

[Denn: $a_{6k} = \underbrace{\cos 2\pi k}_{1} + \underbrace{(-1)^{6k}}_{1} + (-\frac{1}{2})^{6k} \to 2 \quad (k\to\infty)$

Also ist 2 Häufungspunkt von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Wegen $a_k \le 1 + 1 + (-\frac{1}{2})^k \le 2 + (\frac{1}{2})^k$ sind fast alle $a_k \le 2 + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Daher kann es keinen Häufungspunkt > 2 geben.

Also $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k = 2$.]

3.19 Rechenregeln (Auswahl) *Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen. Dann gilt:*

(a)
$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}(a_k+b_k) &\le \limsup_{k\to\infty} a_k + \limsup_{k\to\infty} b_k\\ \liminf_{k\to\infty}(a_k+b_k) &\ge \liminf_{k\to\infty} a_k + \liminf_{k\to\infty} b_k\end{aligned}$$

(b) $a_k \ge 0,\ b_k \ge 0\ (k\in\mathbb{N}) \Longrightarrow$
$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}(a_kb_k) &\le \limsup_{k\to\infty} a_k \cdot \limsup_{k\to\infty} b_k,\\ \liminf_{k\to\infty}(a_kb_k) &\ge \liminf_{k\to\infty} a_k \cdot \liminf_{k\to\infty} b_k\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}(-a_k) &= -\liminf_{k\to\infty} a_k\\ \liminf_{k\to\infty}(-a_k) &= -\limsup_{k\to\infty} a_k\end{aligned}$$

Falls $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ oder $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann gilt in (a) und (b) sogar Gleichheit.

Beweis: (a) Tutorium.

(b) 1. Aussage: ÜA

2. Aussage: Wähle eine Teilfolge $(a_{k_j}b_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(a_kb_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $a_{k_j}b_{k_j}\to\liminf\limits_{k\to\infty}(a_kb_k)$

Durch evtl. weiter Teilfolgenbildungen können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass auch $(a_{k_k})_{j\in\mathbb{N}}$ und $(b_{k_k})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Somit: $\liminf\limits_{k\to\infty}(a_kb_k)=\lim\limits_{j\to\infty}a_{k_j}b_{k_j}=\underbrace{\lim\limits_{j\to\infty}a_{k_j}}_{\substack{\text{H.P. von}\\(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\\\geq 0}}\cdot\underbrace{\lim\limits_{j\to\infty}b_{k_j}}_{\substack{\text{H.P. von}\\(b_k)_{k\in\mathbb{N}}\\\geq 0}}\geq\underbrace{\underbrace{\liminf\limits_{k\to\infty}a_k}_{\substack{\text{kleinster}\\\text{H.P. von}\\(a_k)_{k\in\mathbb{N}}}}}_{\geq 0}\cdot\underbrace{\underbrace{\liminf\limits_{k\to\infty}b_k}_{\substack{\text{kleinster}\\\text{H.P. von}\\(b_k)_{k\in\mathbb{N}}}}}_{\geq 0}$

Gleichheitsaussage:

Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}\to b\ (k\to\infty)$

1.Fall: $b=0$. Wegen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, folgt $a_kb_k\to 0\ (k\to\infty)$, also

$\liminf\limits_{k\to\infty}(a_kb_k)=\lim\limits_{k\to\infty}(a_kb_k)=0=\liminf\limits_{k\to\infty}a_k\cdot 0=\liminf\limits_{k\to\infty}a_k\cdot\lim\limits_{k\to\infty}b_k$

1.Fall $b>0$.

Bereits bewiesen ist

$$\liminf_{k\to\infty}(a_kb_k)\geq\liminf_{k\to\infty}a_k\cdot\lim_{k\to\infty}b_k \tag{\#}$$

für alle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $a_k\geq 0$ $(\underbrace{k\in\mathbb{N}}_{k\geq k_0})$ und $b_k\to b$ mit $b_k\geq 0$ $(\underbrace{k\in\mathbb{N}}_{k\geq k_0})$.

Nach (#) auf $\bar a_k=a_kb_k$ und $\bar b_k=\frac{1}{b_k}$ $(k\geq k_0)$ (Wg. $\lim\limits_{k\to\infty}b_k>0$ ist $b_k>0$ für fast alle k)

$$\liminf_{k\to\infty}(\bar a_k\bar b_k)\geq\liminf_{k\to\infty}\bar a_k\cdot\lim_{k\to\infty}\bar b_k$$

d.h.

$$\liminf_{k\to\infty}a_k\geq\liminf_{k\to\infty}(a_kb_k)\cdot\underbrace{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{b_k}}_{=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}b_k}}$$

also

$$\lim_{k\to\infty}a_k\cdot\lim_{k\to\infty}b_k\geq\liminf_{k\to\infty}(a_kb_k) \tag{\#\#}$$

Aus (#) und (##) folgt die Behauptung.

(c) ähnlich wie (a) und (b)

3.20 Hilfssatz *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, $a \in \mathbb{R}$.*
Dann gilt:

(a) $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k < a \Longleftrightarrow \exists_{a'<a,\ k_0'\in\mathbb{N}} :\ a_k \le a' \ (k \ge k_0')$

(b) $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k > a \Longleftrightarrow \exists_{a''<a,\ k_0''\in\mathbb{N}} :\ a_k \le a'' \ (k \ge k_0'')$

Beweis: „$\Longrightarrow$" Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}(a - \limsup\limits_{k\to\infty} a_k) > 0$. Nach 3.18 gilt für fast alle a_k

$$a_k < \limsup_{k\to\infty} a_k + \varepsilon =: a'$$

erfüllt

$$a' = \limsup_{k\to\infty} a_k + \varepsilon < \limsup_{k\to\infty} a_k + 2\varepsilon = a$$

„$\Longleftarrow$" Sei $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{k_j} \to \limsup\limits_{k\to\infty} a_k$.
Wegen $a_{k_j} \le a'$ folgt $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{j\to\infty} a_{k_j} \le a' < a$.

Im Zusammenhang mit Potenzreihen ist folgende Formulierung der Quotienten- und Wurzelkriteriums nützlich. Dabei ist aber zu beachten, dass die Divergenzaussagen schwächer sind als in den Sätzen 3.8 und 3.10.

3.21 Folgerung *Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann gilt:*

(a) $a_k \ne 0 \ (k \in \mathbb{N}_0),\quad \limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad\Longrightarrow\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert absolut*

$a_k \ne 0 \ (k \in \mathbb{N}_0),\quad \liminf\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad\Longrightarrow\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *divergiert*

(b) $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \quad\Longrightarrow\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert absolut*

$\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \quad\Longrightarrow\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *divergiert*

Beweis: Die Konvergenzaussagen folgen sofort aus 3.20 und 3.8 bzw. 3.10 mit $a := 1$, $q := a'$.

Ebenso liefert 3.20, dass im Fall $\liminf\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ fast alle $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ sind. Somit Divergenz nach 3.8(b).

Falls $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ ist, liegen in jeder ε-Umgebung dieses Häufungspunkts unendlich viele a_k. Somit gilt für unendlich viele k $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$. Daher Divergenz der Reihe nach 3.10b.

3.22 Satz von Cauchy-Hadamard *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe. Dann gibt es $R \in [0, \infty]$ (Bezeichnung: Konvergenzradius), so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $|x| < R$ absolut konvergiert und für $|x| > R$ divergiert. Es gilt*

$$R = \begin{cases} 0 & \text{falls } \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ unbeschränkt} \\ \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} & \text{falls } \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt ist und } \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 0 \\ \infty & \text{falls } \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt ist und } \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \end{cases}$$

Merkregel: Setzt man <u>in diesem Zusammenhang</u> $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$ und definiert wie üblich $\limsup\limits_{k\to\infty} b_k = \infty$, falls es eine Teilfolge $(b_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $b_{k_j} \to \infty$ $(j \to \infty)$ gibt, so ergibt sich

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Beweis: 1. Fall: $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt

Sei $x \neq 0$. Nach 3.21b folgt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert absolut, falls $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} < 1$, d.h. $|x| \cdot \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergiert, falls $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} > 1$, d.h. $|x| \cdot \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Somit absolut Konv. für} & |x| < \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \\ \text{Divergenz} & |x| > \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \end{array}\right\} \text{falls } \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 0$$

Außerdem absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$, falls $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$

2. Fall: $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. Sei $x \neq 0$.

Dann ist auch $\left(\sqrt[k]{|a_k x^k|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, also für fast alle $k \geq 1$. Somit Divergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nach 3.10b.

Bemerkung: Die gleiche Argumentation lässt sich mit dem Quotientenkriterium 3.21a anwenden, <u>wenn</u> $\limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \liminf\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert.

Man erhält dann folgende Formel für den Konvergenzradius (wieder mit $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$):

$$a_k \neq 0 \ (k \in \mathbb{N}_0), \ \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \in [0,\infty] \Longrightarrow R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}$$

3.23 Satz *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \in [0,\infty]$. *Dann gilt:*

(a) Die Funktion $f : (-R,R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *ist für jedes* $r \in (0,R)$ *auf* $[-r,r]$ *lipschitzstetig.*

(b) $x_1 \neq 0, x_n \to 0 \Longrightarrow \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n} \to a_1 \ (n \to \infty)$

[*Hierfür schreiben wir später* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1$]

Beweis: (a) Seien $x, y \in [-r,r]$, wobei $r \in (0,R)$ fest gewählt sei. Dann

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\big(x^k - y^k\big) \overset{\substack{\text{gemoetrische}\\ \text{Summenformel}\\ \downarrow}}{=}$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big(\sum_{i=0}^{k-1} x^{k-1-i} y^i\Big)(x-y)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{\infty}\Big(a_k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^{k-1-i} y^i\Big)\right| \cdot |x-y|$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{i=0}^{k-1} |x|^{k-1-i}|y|^i\right) \cdot |x-y|$$

$$\overset{\substack{|x|\leq r,\\ |y|\leq r}}{\leq} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{i=0}^{k-1} + \underbrace{r^{k-1-i} \cdot r^i}_{r^{k-1}}\right) \cdot |x-y| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| k \cdot r^{k-1} \cdot |x-y|$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| k \cdot r^k\right)}_{L} |x-y|$$

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k| k} - \limsup_{k\to\infty}\Big(\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1\ (k\to\infty)} \cdot \sqrt[k]{|a_k|}\Big)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Gleichheits-}\\ \text{aussage}}}{\overset{3.19\text{b}}{=}} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}_{1} \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Also hat die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ka_kx^k$ denselben Konvergenzradius wie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k$.
Somit gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k|a_k|r^k < \infty$, weil $r \leq R$.

(b) $x \neq 0 : \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_kx^k\right)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_kx^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_kx^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k$

Die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_kx^k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \cdot x^k$ konvergieren entweder beide oder divergieren ungleich für $x \neq 0$. Da sich diese Konvergenzverhalten nicht durch Hinzufügen eines Terms ändert, haben $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ den selben Konvergenzradius.
Damit ist nach (a) die Funktion $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k$ lipschitzstetig in $[-r, r]$, falls $r < R$.
Somit folgt

$$x_n \to 0, x_n \neq 0 \quad \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}{x_n}^k \to \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}0^k = a_1$$

Folgerungen: $x_n \neq 0$: $x_n \to 0$, $\frac{\sin x_n}{x_n} \to 1$, $\frac{\cos x_n - 1}{x_n} \to 0$, $\frac{e^{x_n-1}}{x_n} - 1$ $(n \to \infty)$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots \Longrightarrow a_n = 1 \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots \Longrightarrow a_1 = 0 \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \Longrightarrow a_1 = 1 \end{aligned}$$

§ 4. Stetige Funktionen

Sei im folgenden stets $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$

4.1 Definition (Grenzwert von Funktionen) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (nicht notwendig: $x_0 \in D$), $y_0 \in [-\infty, +\infty]$*
Dann

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 :\Leftrightarrow$ *für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n \to x_0$ gilt $f(x_0) \to y_0$*

(Existenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in D, x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ wird vorausgesetzt.)

(b) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x_n) = y_0 :\Leftrightarrow$ *wie (a) mit der Zusatzforderung $x_n > x_0$ $(n \in \mathbb{N})$*

Alternative Schreibweisen: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \geq x_0} f(x)$

Analog werden $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ *und* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq 0}} f(x)$ *definiert.*

Beispiel: (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a}$ $(a \geq 0, k \in \mathbb{N})$ [vgl. 2.6b]

(b) $$\lim_{x \to 0} \underbrace{x^\beta}_{[=e^{\beta \ln x}]} = \begin{cases} 0 & \text{für } \beta \geq 0 \\ 1 & \text{für } \beta = 0 \\ \infty & \text{für } \beta < 0 \end{cases}$$ [folgt aus 2.21]

(c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

(d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

(e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \underbrace{\dfrac{|x|}{x}}_{1} = 1, \quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \underbrace{\dfrac{|x|}{x}}_{-1} = -1$

Bemerkung: $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x}$ ist <u>nicht</u> definiert, weil der Definitionsbereich der Wurzelfunktion $[0; \infty]$ ist und es <u>keine</u> Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, mit $x_n \geq 0$ und $x_n \to -1$ $(n \to \infty)$.

4.2 Definition (Stetigkeit) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$. f heißt stetig in a, wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
f ist stetig (in D), wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Bemerkung: *lipschitzstetige Funktionen sind stetig.*

Beispiele für stetige Funktionen: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\sqrt[k]{\ldots} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, Potenzreihen mit Konvergenzradius $R > 0$ sind in $(-R, R)$ stetig, insbesondere $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Betrachte man zu $f, g : D \to \mathbb{R}$, die Funktionen

$$\begin{array}{ll} f \pm g & : D \to \mathbb{R}, \big(f \pm g\big)(x) := f(x) \pm g(x) \ (x \in D) \\ f \cdot g & : D \to \mathbb{R}, \big(f \cdot g\big)(x) := f(x) \cdot g(x) \ (x \in D) \\ \frac{f}{g} & : D \to \mathbb{R}, \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ (x \in D') \\ & : D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\} \end{array}$$

4.3 Satz *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$. Dann sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und falls $g(x) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ jeweils stetig in a.*

Beweis: p Polynom, q Polynom (nicht Nullpolynom)

$\Longrightarrow \frac{p}{q}$ stetig in jedem $a \in \mathbb{R}$, für das $q(x) \neq 0$ ist.

Anders ausgedrückt: Rationale Funktionen (= Quotienten von Polynomen) sind stetig in ihrem Definitionsbereich.

4.4 Satz (Verknüpfung stetiger Funktionen) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, $f(D) \subset E$. f sei stetig in $a \in D$ und g sei stetig in $f(a)$. Dann ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g\big(f(x)\big)$ stetig in a.*

Beispiele:

- $x_n \in D$ $(n \in \mathbb{N}), x_n \to a \overset{f \text{ stetig in } a}{\Longrightarrow} \underbrace{f(x_n)}_{\in E} \to f(a)$ also $f(x_n) \in E$ $(n \in \mathbb{N}), f(x_n) \to f(a) \overset{g \text{ stetig in } f(a)}{\Longrightarrow} g\big(f(x_n)\big) \to g\big(f(a)\big)$.
- $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig, $|f|, |g|, \max(f, g), \min(f, g)$ stetig

$$\left[\begin{array}{rcl} & & |\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist stetig, also nach 4.4} \\ |f| & = & |\cdot| \circ f \text{ stetig} \\ \max(f, g) & = & \dfrac{f+g}{2} + \dfrac{|f-g|}{2} \text{ stetig} \end{array} \right]$$

4.5 Zwischenwertsatz *Satz 1.18 bleibe auch richtig, wenn man dort lipschitzstetig durch stetig ersetzt.*

Beweis: 1. Teil: Im Beweis zu 1.18 wurden ohne Verwendung der Lipschitzstetigkeit unter den Voraussetzungen $f(a) \leq 0, f(b) > 0$ eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ konstruiert mit $f(a_n) \leq 0, f(b_n) > 0$.

Daraus folgte dann, dass genau ein $x \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ existiert.

2. Teil: zu zeigen: $f(x) = 0$

$x \in \underbrace{I_n}_{\in [a_n, b_n]}$ $(n \in \mathbb{N}), |I_n| = b_n - a_n \to 0$,

$\Longrightarrow a_n \to x, b_n \to x$

$$\begin{aligned}
&\overset{f\text{ stetig}}{\Longrightarrow} && \underbrace{f(a_n)}_{\le 0} \to x,\ \underbrace{f(b_n)}_{>0} \to x \\
&\Longrightarrow && x \le 0 \quad \wedge \quad x \ge 0 \\
&\Longrightarrow && x = 0
\end{aligned}$$

4.6 Folgerung *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $y_0 \in \mathbb{R}$ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$*
Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.
(Kurz ausgedrückt: f nimmt alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an)

Beweis: Wende 4.5 auf die Funktion $g(x) = f(x) - y_0$ an.

4.7 Satz (Umkehrung streng monoton stetiger Funktionen) *Sei $I := [a, b], f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend) und stetig.*
Dann bildet f das Intervall I auf $J := [f(a), f(b)]$ (bzw. $[f(b), f(a)]$) bijektiv ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend) und stetig.

Bemerkung:

1. Statt f^{-1} hätte man genauer $\iota \circ \tilde{f}^{-1}$ schreiben müssen,
   wobei $\tilde{f}: I \to J, \quad \tilde{f}(x) = f(x)$ (siehe Beweis)
   $\iota : I \to \mathbb{R}, \quad \iota(x) = x$
2. Auch unter der Voraussetzung $f : I \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig folgt die Stetigkeit von f^{-1}
   (Bsp. $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$)

Beweis: o.E.d.A.: f streng monoton wachsend (Betrachte andernfalls $-f$)

- f ist injektiv, weil streng monoton wachsend

  $\Big[$ Sei $x_1 \neq x_2$. O.E.d.A. $x_1 < x_2 \overset{\substack{\text{streng}\\\text{monoton}\\\text{wachsend}}}{\Longrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\Big]$

- $f(I) = J$:

  $$x \in I \Longleftrightarrow a \le x \le b \overset{f\text{ monoton}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} f(a) \le f(x) \le f(b) \\ f(x) \in [f(a), f(b)] = J \end{array}$$

  Also $f(I) \subset J$.

  Sei $y \in J$. Dann $f(a) \le y \le f(b)$. Nach der Folgerung 4.6 aus dem Zwischenwertsatz existiert $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

  Also $J \subset f(I)$.

- Somit ist $\tilde{f} : I \to J$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion $\tilde{f}^{-1} : J \to I$.
  Für die Abbildung $\iota \circ \tilde{f}^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ($\iota : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$) schreiben wir (etwas ungenau) f^{-1}.
- Zeige: $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ist stetig.
  Annahme: $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ist nicht stetig.
  Dann: $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, y \in J : y_n \in J \ (n \in \mathbb{N}), y_n \to y, f^{-1}(y_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{„konvergiert} \\ \text{nicht“}}}{\not\to} f^{-1}(y)$

  Somit gibt es $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele $f^{-1}(y_n)$ <u>nicht</u> in $U_\varepsilon\big(f^{-1}(y)\big)$ liegen.
  Somit gibt es eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass
  $$\big|f^{-1}(x_{n_k}) - f^{-1}(y)\big| \geq \varepsilon \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$
  Da $f^{-1}(y_{n_k}) \in I = [a,b]$ gilt, ist $\big(f^{-1}(y_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Also gibt es eine konvergente Teilfolge $f^{-1}(y_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in I$ konvergiert, d.h.
  $$f^{-1}(y_{n_{k_j}}) \longrightarrow x \quad (j \to \infty) \qquad (**)$$
  Da f stetig ist, folgt
  $$y_{n_{k_j}} = f\big(f^{-1}(y_{n_{k_j}})\big) \longrightarrow f(x) \quad (j \to \infty) \qquad (***)$$
  Wegen $y_n \to y$ ($n \to \infty$) folgt aus $(***)$ $y = f(x)$.
  Andererseits ergibt sich aus $(*)$ und $(**)$:
  $$\big|\underbrace{f^{-1}(y_{n_{k_j}})}_{\substack{\to x\ (j\to\infty) \\ \text{nach } (**)}} - \underbrace{f^{-1}(y)}_{=x}\big| \geq \varepsilon \quad (j \in \mathbb{N})$$
  Somit $0 \geq \varepsilon$. Widerspruch zu $\varepsilon > 0$!

Motivation für Supremum und Infimum einer Menge $\mathbf{M} \subset R$

$M := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ hat kein Maximum ($1 \notin M$!), allerdings hat die Zahl 1 hier eine besondere Bedeutung.
Sie ist nicht nur eine obere Schranke von M, sondern sogar die kleinste obere Schranke.
$s \in \mathbb{R}$ heißt <u>obere Schranke</u> von M, wenn gilt:

$$\forall_{x\in M} : x \leq s$$

$m \in \mathbb{R}$ heißt <u>Maximum von M</u>, wenn gilt:

$$m \text{ ist obere Schranke von } M \text{ und } m \in M. \quad (\text{Bez. } m = \max M)$$

4.8 Satz und Definition *Jede nicht leere, nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Teilmenge von R besitzt eine kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke.*

Bezeichnung: $\sup M$ *(bzw.* $\inf M$*)*

Beweis: Sei s_0 eine obere Schranke von M und $x_0 \in M$. Wir bilden ausgehend von $I_0 = [x_0, s_0]$ eine Intervallschachtelung $I_n = [x_n, s_n]$ mit $x_n \in M$ und s_n obere Schranke von M:

$$\underbrace{I_{n+1}}_{[x_{n+1},\, s_{n+1}]} = \begin{cases} [x_n, \frac{x_n+s_n}{2}], & \text{falls } \frac{x_n+s_n}{2} \text{ obere Schranke von } M \\ [x_{n+1}, s_n], & \text{mit } x_{n+1} \in M \text{ und } x_{n+1} \geq \frac{x_n+s_n}{2}, \text{ falls } \frac{x_n+s_n}{2} \ \underline{\text{keine}} \text{ obere Schranke von } M \text{ ist.} \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $|I_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|I_n|$.

Also gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{s\}$.

Außerdem gilt $x_n \to s$ $(n \to \infty)$ und $s_n \to s$ $(n \to \infty)$

Da s_n obere Schranke von M gilt

$$x \leq s_n \quad (x \in M)$$

und somit wegen $s_n \to s$ $(n \to \infty)$

$$x \leq s \quad (x \in M),$$

d.h. s ist obere Schranke von M.

Noch zu zeigen: s ist <u>kleinste</u> obere Schranke von M.

Annahme: s ist nicht kleinste Schranke von M. Dann ist $s - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ eine noch kleinere obere Schranke, d.h. insbesondere $x_n \leq s - \varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$

Wegen $x_n \to s$ folgt $s \leq s - \varepsilon$. Widerspruch!

Bemerkung: $s = \sup M \iff s$ obere Schranke von M <u>und</u> $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in M$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to s$ $(n \to \infty)$

[Bew. „$\Longrightarrow$“ Bew. von 4.8
„$\Longleftarrow$“ Analog zu Bew. 4.9 ab Annahme]

4.9 Satz *Sei* I *ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* f *beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an,*
d.h. es gibt $\bar{x} \in I$ *mit* $f(\bar{x}) = \sup\{f(x) : x \in I\}$
$x \in I$ *mit* $f(x) = \inf\{f(x) : x \in I\}$

Beweis: Zeige nur die Existenz des Maximums von f:

1. Zeige: f ist nach oben beschränkt, d.h. $\{f(x) : x \in I\}$ ist nach oben beschränkt.

   $$\left[\quad \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in I : f(x) \leq m \quad\right]$$

   Falls das nicht zutrifft, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(x_1) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

   Nach Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   $$x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

   Aus der Stetigkeit von f folgt $f(x_{n_k}) \to f(x)$ $(k \to \infty)$ im Widerspruch zu $f(x_{n_k}) \to \infty$.

2. Nach Satz 4.8 und 1. existiert $\sup\{f(x) : x \in I\}$.

   Entsprechend der Bemerkung nach 4.8 gibt es eine Folge – wieder mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt – mit

   $$f(x_n) \to \sup\{f(x) : x \in I\} \quad (n \to \infty)$$

   Wähle eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ aus und setze $\bar{x} := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

   Dann $f(\bar{x}) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \sup\{f(x) : x \in I\}$.

4.10 Satz (ε-δ-Definition der Stetigkeit) *$f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$ genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon$$

$$\left[\quad \textit{Anschauliche Vorstellung: } \underbrace{\mathrm{diam}}_{\textit{Durchmesser}}\big(U_\delta(a)\big) \to 0 \Longrightarrow \overbrace{\mathrm{diam}\, f\big(U_\delta(a)\big)}^{=\sup\{|f(x)-f(a)| : |x-\bar{x}| \leq \delta\}} \to 0 \quad\right]$$

[*Lipschitzstetigkeit $\Longrightarrow$ Stetigkeit in a:*
Sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ folgt

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq L|x - a| < L\delta = \varepsilon \quad \Big]$$

Beweis: „$\Longleftarrow$" Die ε-δ-Bedingung sei erfüllt, d.h.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}: |x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Zu zeigen: $x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)$, d.h.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}: |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ und $\varepsilon>0$. Wähle $\delta>0$ nach der ε-δ-Bedingung. Dann gibt es $n_0\in\mathbb{N}$, so dass

$$|x_n-a|<\delta \ (n\geq n_0) \quad (\text{wg. } x_n\to a)$$

Aus der ε-δ-Definition folgt

$$|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon \ (n\geq n_0)$$

„$\Longrightarrow$" Die ε-δ-Bedingung sei <u>nicht</u> erfüllt.
Zu zeigen: $\exists_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}: x_n\in D\ (n\in\mathbb{N}), x_n\to a\ (n\to\infty), f(x_n)\not\to f(a)\ (n\to\infty)$
Da ε-δ-Bedingung nicht erfüllt ist, gilt

$$\exists_{\varepsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{x\in D}: |x-a|<\delta \wedge |f(x)-f(a)|\geq\varepsilon$$

Mit $\delta=\frac{1}{n}$ erhält man jeweils ein $x_n\in D$ mit $|x_n-a|<\frac{1}{n}\wedge|f(x_n)-f(a)|\geq\varepsilon$
Also: $x_n\to a\ (n\to\infty)\wedge f(x_n)\not\to f(a)\ (n\to\infty)$

Bemerkung: Vorteile des allgemeinen Stetigkeitsbegriffs:

- Folgen sind zur Definition nicht mehr notwendig
- Verfeinerungen wie z.B. gleichmäßiger Stetigkeit können erklärt werden (Analysis II)

§ 5. Differentiation

5.1 Definition *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt in $a \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. (Bez.: Ableitung oder Differentialquotient von f in a.)
Vorausgesetzt wird dabei, dass es mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D \setminus \{a\}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ gibt.

Bemerkung: (a) Ist f durch eine Zuordnung $x \mapsto f(x)$ formelmäßig gegeben, so wird oft die Schreibweise

$$\frac{df}{dx}(a) \qquad \text{oder} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} \text{ anstelle von } f'(a)$$

benutzt.

$$\left[\quad \text{z.B. } \left.\frac{dx^n}{dx}\right|_{x=2} \quad \right]$$

(b) Der Differentialquotient kann auch in der Form

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

geschrieben werden. (Dabei werden alle Folgen $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ betrachtet, mit $h_n \neq 0$ und $a + h_n \in D$ $(n \in \mathbb{N}), h_n \to 0$)

5.2 Einige Ableitungen

(a) $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, \quad f'(x) = nx^{n-1}$ $(x \in \mathbb{R})$

(b) $f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R}), c \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$

(c) $f(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$

(d) $f(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$

(e) $f(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = -\sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$

Beweis: (a)

$$f'(x) = \lim_{\substack{k\to 0\\ h\neq 0}} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{\substack{k\to 0\\ h\neq 0}} \frac{(\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{\substack{k\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\binom{n}{0} h^0 x^n + (\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to \infty\\ h\neq 0}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \lim_{\substack{k\to 0\\ h\neq 0}} \underbrace{\binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k}}_{\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\ldots}$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{k-1}$$

(b) $f'(x) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \underbrace{\frac{c-c}{h}}_{0}$

(c) $f'(x) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} e^x \frac{e^h-1}{h} = e^x \underbrace{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{e^h-1}{h}}_{1} = e^x$ (Bew. nach 3.23)

(d)

$$f'(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \overset{3.14}{=}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\cdot \sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \cos\left(x+\tfrac{h}{2}\right) \cdot \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \overset{\text{cos stetig}}{=} \cos(x)\cdot 1 = \cos(x)$$

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin h}{h} = 1$ (Bew. nach 3.23)

(e) Analog zu (d)

Vor der Einführung der Differentiationsregeln benötigen wird noch eine andere Charakterisierung der Differenzierbarkeit

5.3 Satz *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$. Dann gilt:*

f differenzierbar in $a \iff \exists_{c\in\mathbb{R}} \exists_{r:D\to\mathbb{R}}$ mit $f(x) = f(a) + c\cdot(x-a) + r(x)$ $(x \in D)$
<u>und</u> $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{r(x)}{x-a} = 0$

In diesem Fall ist $c = f'(a)$.

Beweis: „⇒“ $c := f'(a), r(x) := f(x) - f(a) - \overbrace{f'(a)}^{c}\cdot(x-a)$ $(x \in D)$

Dann: $\frac{r(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ $(x \in D, x \neq a)$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{r(x)}{x-a} = \underbrace{\left(\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}_{f'(a)} - f'(a) = 0$$

„$\Leftarrow$“ $f(x) = f(a) + c(x-a) + r(x)$ $(x \in D)$ mit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{r(x)}{x-a} = 0$.

Dann: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + \underbrace{\frac{r(x)}{x-a}}_{\to 0\ (x\to a, x\neq a)}$ $(x \in D, x \neq a)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$, d.h. f differenzierbar in a mit $f'(a) = c$

5.4 Satz *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$. Dann gilt:*

f differenzierbar in $a \Longrightarrow f$ stetig in a

Beweis: Nach 5.3 gilt: $f(x) = f(a) + c(x-a) + r(x)$ mit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{r(x)}{x-a} = 0$ $(x \in D)$.

$= f(a) + c(x-a) + \frac{r(x)}{x-a} \cdot (x-a)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a) + c \cdot \underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} (x-a)}_{0} + \underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{r(x)}{x-a}}_{0} \cdot \underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} (x-a)}_{} = f(a)$

[Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to a$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.

Zeige: In $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$ liegen fast alle $f(x_n)$.

1.F.: Nur endlich viele $x_n \neq a$: Dann sind fast alle $x_n = a$, d.h. $f(x_n) = f(x) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$.

2.F.: Unendlich viele $x_n \neq a$. Bilde aus diesen die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
Wegen $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(x)$ liegen fast alle $f(x_{n_k})$ in $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$.
Alle sonstigen $f(x_n)$ liegen wegen $x_n = a$ ohnehin in $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$.

]

Bemerkung: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht:

$f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist stetig in 0, aber <u>nicht</u> differenzierbar in 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Also $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1$

Beide Grenzwerte müssten übereinstimmen, wenn f differenzierbar in 0 wäre.

5.5 Satz (Ableitungsregeln für arithmetische Operatoren) *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbare Funktionen.*
Dann sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und sofern $g(a) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
\big(f \pm g\big)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\
\big(f \cdot g\big)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) && \textit{(Produktregel)} \\
\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2} && \textit{(Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Beweis: $\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(a)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \pm \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)}$ $(x \in D, x \neq a)$

$$\begin{aligned}
&\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} = \frac{\big(f(a)-f(a)\big) \cdot g(x) + f(a) \cdot \big(g(x)-g(a)\big)}{x-a} \\
&= \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(a)} + f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a) \ (x \to a, x \neq a)} \ (x \in D, x \neq a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\big(\frac{f}{g}\big)(x) - \big(\frac{f}{g}\big)(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{f(x)-g(a)-f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} = \frac{\big(f(x)-f(a)\big)g(a) - f(a)\big(g(x)-g(a)\big)}{(x-a)g(x)g(a)} \\
&= \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)} \to \frac{f'(c)g(a)-f(a)+g'(a)}{g(a)^2} \ (x \to a, x \neq a)
\end{aligned}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(x \neq 0)$, $n \in \mathbb{N}$ (fest).
$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}$ $(x \neq 0)$

5.6 Satz (Kettenregel) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$, f sei differenzierbar in $a \in D$, g sei differenzierbar in $f(a) \in E$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g\big(f(x)\big)$ differenzierbar in a und es gilt*

$$\big(g \circ f\big)'(a) = g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$$

Beweis: f differenzierbar in a $:\Longleftrightarrow$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x) \ (x \in D) \text{ mit } \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{r(x)}{x-a} = 0$$

g differenzierbar in $f(a)$ $:\Longleftrightarrow$

$$g(y) = g\big(f(a)\big) + g'\big(f(a)\big)\big(y - f(a)\big) + s(y) \ (y \in E) \text{ mit } \lim_{\substack{y \to f(a) \\ y \neq f(a)}} \frac{s(y)}{y - f(a)} = 0$$

$$\begin{aligned}
\overset{y=f(x)}{\Longrightarrow} g\big(f(x)\big) &= g\big(f(a)\big) + g'\big(f(a)\big) \cdot \big(f(x) - f(a)\big) + s\big(f(x)\big) \ (x \in D) \\
&= g\big(f(a)\big) + g'\big(f(a)\big) \cdot \big(f'(a)(x-a) + r(x)\big) + s\big(f(x)\big) \ (x \in D) \\
&= g\big(f(a)\big) + g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a) \cdot (x-a) + \underbrace{g'\big(f(a)\big) \cdot r(x) + s\big(f(x)\big)}_{t(x):=} \ (x \in D)
\end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{t(x)}{x-a} = 0$

$$\begin{aligned}\frac{t(x)}{x-a} &= g'\big(f(a)\big)\cdot\frac{r(x)}{x-a} + \frac{s\big(f(x)\big)}{x-a}\\ &= g'\big(f(a)\big)\underbrace{\frac{r(x)}{x-a}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{s\big(f(x)\big)}{f(x)-f(a)}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)}\end{aligned}$$

Wegen $\frac{s(y)}{y-f(a)} \to 0$ für $y \to f(a), y \neq f(a)$ [Differenzierbarkeit von g in $f(a)$] und $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$.

Beispiele: (a) $f(x) = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$, $a > 0$ fest
Dann $f(x) = \exp(x \ln a) = \exp\big(\ln(x)\big)$ mit $\ln(x) = x\ln a, h'(x) = \ln a$
$f(x) = \exp'\big(h(x)\big)\cdot h'(x) = \exp(x\ln a)\cdot \ln a = a^x \ln a$

(b) $f: D \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$, $h: F \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$, $g(E) \subset F$, f differenzierbar in a, g differenzierbar in $f(a)$, h differenzierbar in $g\big(f(a)\big)$.

$$\begin{aligned}\big(h\circ g\circ f\big)'(a) &= \big(h\circ(g\circ f)\big)'(a) = h'\big((g\circ f)(a)\big)\cdot\big(g\circ f\big)'(a)\\ &= h'\Big(g\big(f(a)\big)\Big)\cdot g'\big(f(a)\big)f'(a).\end{aligned}$$

5.7 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) *Sei I ein abgeschlossenes beschränktes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, $J := f(I)$.*
Ist f in $a \in I$ differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \to \mathbb{R}$ in $b := f(a)$ differenzierbar und es gilt

$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$$

Hätte man die Differenzierbarkeit von f^{-1} in b bereits bewiesen, so könnte man einfach die Kettenregel auf die Funktion $f\circ f^{-1}$ anwenden.

$$1 = \mathrm{id}'(b) = \big(f\circ f^{-1}\big)'(b) = \underbrace{f'\big(f^{-1}(b)\big)}_{\neq 0}\cdot\big(f^{-1}\big)'(b)$$

$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$$

$$\Big[\quad \mathrm{id}: J \to \mathbb{R}, \mathrm{id}(x) = x \Longrightarrow \mathrm{id}'(x) = 1 \quad\Big]$$

Beweis: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $y_n \to b$ $(n\to\infty)$, und f in a differenzierbar.
$y_n \in J, y_n \neq b$ $(n\in\mathbb{N})$.

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n-b} = \frac{1}{\frac{y_n-b}{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}} \to \frac{1}{f'(a)} \ (n\to\infty)$$

Beispiele: (a) $f(x)=e^x$ $(x\in\mathbb{R})$, $f^{-1}(x)=\ln x$ $(x>0)$

$$\ln'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{1}{\exp'\big(\ln(x)\big)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

[Direkt mit Kettenregel: $e^{\ln x}=x$

$\frac{d}{dx}e^{\ln x}=1$

$\underbrace{e^{\ln x}}_{x}\cdot\frac{d}{dx}\ln x = 1 \qquad \frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$]

[Genauer müsste man zunächst ein abgeschlossenes beschränktes Intervall wählen, in dem $x>0$ liegt.]

(b) Aus (a) und der Kettenregel folgt für $f(x)=x^\alpha$ $(x>0)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ fest.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha\ln x} \ (x>0), \qquad \text{mit } h(x)=\exp(x), g(x)=\alpha\ln x \\ &= h\big(g(x)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \exp'(\alpha\ln x)\cdot\frac{\alpha}{x} \\ &= e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^\alpha\cdot\frac{1}{x} = ax^{\alpha-1} \end{aligned}$$

5.8 Definition (lokale Extremstellen) *Sei I ein offenes Intervall, $f: I\to\mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0\in I$*

f hat in x_0 ein lokales Maximum $:\Longleftrightarrow \exists_{\varepsilon>0}\forall_{x\in U_\varepsilon(x_0)}: f(x)\leq f(x_0)$
f hat in x_0 ein lokales Minimum $:\Longleftrightarrow \exists_{\varepsilon>0}\forall_{x\in U_\varepsilon(x_0)}: f(x)\geq f(x_0)$
f hat in x_0 ein lokales Extremum $:\Longleftrightarrow$ *f hat in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum*

5.9 Satz (Notwendige Bedingungen für ein lokales Extremum) *Sei I ein offenes Intervall, $f: I\to\mathbb{R}$ differenzierbar, f besitze in $x_0\in I$ ein lokales Extremum. Dann gilt*

$$f'(x_0)=0$$

Beweis: o.E.d.A.: x_0 lokales Maximum von f

d.h.: $f(x) \leq f(x_0)\ \big(x \in U_\varepsilon(x_0)\big)$
$f(x) - f(x_0) \leq 0\ (x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 & (0 < x - x_0 < \varepsilon) \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 & (-\varepsilon < x - x_0 < 0) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x_0} \leq 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x_0} \geq 0 \end{cases}$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, müssen beide Limites gleich sein, d.h.

$$f'(x_0) \leq 0, f'(x_0) \geq 0$$

also $f'(x_0) = 0$.

5.10 Mittelwertsatz *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar*
Dann existiert $\xi \in (a,b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Ein Spezialfall ist der

5.11 Satz von Rolle *Gilt unter den Voraussetzungen von Satz 5.10 zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis von 5.11: 1. Fall: f konstant. Dann ist die Behauptung wegen $f'(x) = 0\ \big(x \in (a,b)\big)$ klar.

2. Fall: f ist nicht konstant. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$
O.E.d.A. $f(x_0) > f(a)$. Da f stetig ist und $[a,b]$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist, besitzt f eine Maximalstelle (Bez. ξ).
$\xi \in (a,b)$ wegen $f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$.
Nach 5.9 ergibt sich $f'(\xi) = 0$

Beweis von 5.10: Setze $h(x) := f(x) - \left(\frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a)\right)\ \big(x \in [a,b]\big)$

$h(a) = 0$, $h(b) = 0$, h ist stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Somit gibt es nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$h'(\xi) = 0$$

d.h.

$$f'(\xi) - \left(\frac{f(b)}{b-a} - \frac{f(a)}{b-a}\right) = 0$$

oder

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

5.12 Folgerung *Sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt*

(a) $f'(x) > 0 \ (x \in I) \Longrightarrow f$ *streng monoton wachsend*
$f'(x) < 0 \ (x \in I) \Longrightarrow f$ *streng monoton fallend*

(b) $f'(x) \geq 0 \ (x \in I) \Longleftrightarrow f$ *monoton wachsend*
$f'(x) \leq 0 \ (x \in I) \Longleftrightarrow f$ *monoton fallend*

Bemerkung: Die Umkehrung in (a) gilt im allgemeinen nicht:
$f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ ist streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

Beweis: (a) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) \overset{\text{MWS}^1}{=} \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{>0} < 0$

(b) „$\Longrightarrow$“ wie (a)
„$\Longleftarrow$“ Sei f monoton wachsend

$$f'(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \geq 0$$

5.13 Anwendung [Hinreichende Bedingung für globales Extremum] *Sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x_0) = 0$.*
Falls $f'(x) \underset{\text{(Minimum)}}{\overset{(\leq)}{\geq}} 0$ $(x \in I, x < x_0)$ und $f'(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0$ $(x \in I, x > x_0)$ dann hat f in x_0 ein globales Maximum.

5.14 Verallgemeinerter Mittelwertsatz *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, f, g differenzierbar in (a, b), $g'(x) \neq 0$ $\big(x \in (a, b)\big)$. Dann gilt $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Bemerkung: (a) Der MWS ist ein Spezialfall des verallgemeinerten MWS $(g(x) = x)$

[1] Mittelwertsatz

(b) Aus dem MWS würde man letztlich

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} \subset \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

mit $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ erhalten.

Beweis: $g(b) - g(a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MWS}}}{=} \underbrace{g'(a)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\neq 0}$

Betrachte $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g\big(x - g(a)\big)$ $(x \in [a,b])$

h ist stetig auf $[a,b]$, differenzierbar in (a,b) und $h(a) = f(a)$, $h(b) = f(b) - \big(f(b) - f(a)\big) = f(a)$;

Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in (a,b)$, so dass $h'(\xi) = 0$.

d.h. $f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0$

bzw. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Motivation für die L'Hostpitalsche Regel:
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in D$, $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ $(x \in D \setminus \{a\})$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{0}}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \to \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Beispiel: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin'(0)}{1} = \cos(0) = 1$

Für $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$ $(x \to a, x \neq a)$ reicht diese Aussage nicht.

5.15 Regel von de L'Hospital *Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $g'(x) \neq 0$ $\big(x \in (a,b)\big)$, außerdem sei erfüllt*

$$f(x) \to 0, \;\; g(x) \to 0 \quad (x \to a)$$

oder

$$f(x) \to \infty, \;\; g(x) \to \infty \quad (x \to a)$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn der zweite Grenzwert existiert.
Entsprechend für $x \to b$.

Beweis: 1. Fall $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ für $x \to a, a \neq -\infty$

Dann sind f und g stetig in a fortsetzbar durch $f(a) := 0$ und $g(a) := 0$

Der verallgemeinerte MWS liefert dann

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \to \lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)}$$

weil mit $x \to a$ auch $\xi \to a$ konvergiert.

Analog für $x \to b, b \neq 0$

2. Fall $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Wir können o.E.d.A. annehmen, dass $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $a > 0$ vorliegt.
$\tilde{f}(x) := f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \tilde{g}(x) := g\left(\frac{1}{x}\right) \quad \left(x \in (0, \frac{1}{a})\right)$

Wegen $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ sind $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ durch $\tilde{f}(0) := 0$, $\tilde{g}(0) := 0$ stetig fortsetzbar in 0.

Anwendung des 1. Falls auf $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ liefert

$$\frac{\frac{d}{dx}\tilde{f}(a)}{\frac{d}{dx}\tilde{g}(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}\cdot g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} \to \lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} \; (x \to 0)$$

Daher existiert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Nach Definition von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

und daraus die Behauptung

Analog für $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ $(x \to -\infty)$ $(a = -\infty)$

Zum Beweis des Falles $\frac{\infty}{\infty}$ benötigen wir

5.16 Hilfssatz *Seien $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $c_n \to \infty$, $d_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Dann gibt es eine monoton wachsende Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) \to \infty$ $(\to \infty)$ und*

$$\frac{c_{\varphi(n)}}{c_n} \to 0, \; \frac{d_{\varphi(n)}}{d_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Insbesondere gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $c_n \neq 0$, $d_n \neq 0$, $c_{\varphi(n)} \neq c_n$, $d_{\varphi(n)} \neq d_n$ $(n \geq n_0)$

Fortsetzung des Beweises von 5.15:

3. Fall: $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \to a$.
   Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in (a,b)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $x_n \to a$ $(n \to \infty)$
   Wähle: $\varphi(n)$ nach 5.16, so dass

$$\frac{f(x_{\varphi(n)})}{f(x_n)} \to 0, \ \frac{g(x_{\varphi(n)})}{g(x_n)} \to 0$$

$$\left[\quad c_n := f(x_n), \ d_n := g(x_n) \quad \right]$$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_{\varphi(n)})}{g(x_n) - g(x_{\varphi(n)})} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_{\varphi(n)})}{g(x_n)}}{1 - \frac{f(x_{\varphi(n)})}{f(x_n)}}$$

$$\underset{\text{Verallg. MWS}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_{\varphi(n)})}{g(x_n)}}{1 - \frac{f(x_{\varphi(n)})}{f(x_n)}} \to \lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} \cdot \frac{1}{1}.$$

   Also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{f'(x)} g'(x)$$

4. Fall: $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ $(b = \infty)$
   Rückführung auf den 3. Fall analog zur Vorgehensweise im 2. Fall.

Beweis des Hilfssatzes 5.16: O.E.d.A. $c_n > 0$, $d_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$

Bei <u>festem</u> $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_k}{c_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_k}{d_n} = 0$, also gibt es $n_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{c_k}{c_n} < \frac{1}{k}, \ \frac{d_k}{d_n} < \frac{1}{k} \quad (n \geq n_k)$$

Es ist problemlos möglich $n_{k+1} > n_k$ zu wählen, daher gilt

$$\frac{c_k}{c_n} < \frac{1}{k}, \ \frac{d_k}{d_n} < \frac{1}{k} \quad (n_k \leq n < n_{k+1})$$

Definiere $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$\varphi(n) := k$ für $n_k \leq n < n_{k+1}$
$\varphi(n) = 1$ für $1 \leq n \leq n_1$

Mit dieser Notation ergibt sich

$$\frac{c_{\varphi(n)}}{c_n} < \frac{1}{\varphi(n)}, \ \frac{d_{\varphi(n)}}{d_n} < \frac{1}{\varphi(n)} \quad (n \geq n_1)$$

Wegen $\varphi(n) \to \infty$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{\varphi(n)}}{c_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_{\varphi(n)}}{d_n} = 0$

Beispiele für die Anwendung der Regel von de L'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\ln x}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\cdot \ln x = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{d}{dx}(-\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar
Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so heißt f zweimal differenzierbar.
$\left(\text{Bezeichnung: } f''(a) \text{ bzw. } \frac{d^2f}{dx^2}(a) \text{ bzw. } \frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=a}\right)$
Allgemein durch rekursive Definition:
Ist $f^{(k-1)} : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, dann heißt f k-mal differenzierbar in a. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar und ist $f^{(k)}$ stetig, so heißt f k-mal stetig differenzierbar.

Motivation für den Satz von Taylor:
Sei p ein Polynom vom Grad n, d.h.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Dann gilt

$$p^{(k)}(0) = a_k \cdot k' \quad (k = 0, \ldots, n)$$

somit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Entsprechend führt der Ansatz

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

auf die Formel

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

5.17 Satz von Taylor mit Lagrange-Restglied *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$. Dann existiert $\xi \in (a,b)$, so dass*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\textit{Taylorpolynom der Ordnung } n \textit{ zu } f \textit{ an der Stelle } x_0} + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Beweis: Es reicht, die Behauptung für $x_0 = a$ und $x = b$ zu beweisen, d.h. zu zeigen, dass für geeignet gewähltes $\xi \in (a,b)$ gilt

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a) \cdot (b-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (*)$$

Für $p(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \ldots + f^{(n)}(a) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}$ gilt

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad (k = 0, \ldots, n) \quad (**)$$

Setze

$$h(x) := f(x) - \big(p(x) + m(x-a)^{n+1}\big), \quad (***)$$

wobei m so gewählt wird, dass $h(b) = 0$. (Das ist möglich, weil man die Gleichung $h(b) = 0$ einfach nach m auflösen kann.)

[Motivation: Betrachte h im Fall des MWS:

$$h(x) = f(x) - \big(f(a) + m(x-a)\big)$$

m wird so gewählt, dass $h(b) = 0$.]

Aus $(**)$ ergibt sich, dass

$$h^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, \ldots, n). \quad (****)$$

Nach dem Satz von Rolle existiert wegen $h(a) = h(b) = 0$ ein $\xi_1 \in (a,b)$ mit $h'(\xi_1) = 0$. Aus $h'(a) = 0 = h'(\xi_1)$ ergibt sich entsprechend die Existenz von $\xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a,b)$ mit $h''(\xi_2) = 0$ usw.

Insgesamt erhält man $\xi_{n+1} \in (a, \xi_n) \subset (a,b)$ mit

$$h^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0,$$

d.h. $h^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \Big(\underbrace{p^{(n+1)}(\xi)}_{0} + m \cdot \underbrace{\tfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x-a)^{n+1}\Big|_{x=\xi}}_{(n+1)!}\Big) = 0$

bzw. $m = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Wegen $h(b) = 0$ folgt dann aus $(***)$ die Taylor-Formel $(*)$.

Beispiele: (a) $f(x) = e^x \ (x \in \mathbb{R})$

$f^{(k)}(x) = e^x \ (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0)$ [$f^{(0)}(x) := f(x)$, $f^{(1)}(x) := f'(x)$]

$f^{(k)}(0) = 1 \ (k \in \mathbb{N}_0)$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\overset{\xi \text{ hängt von } x \text{ ab}}{\overset{\downarrow}{\xi}})}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \frac{e^{\xi}\cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \underbrace{\frac{e^{|x|}\cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{\to 0\ (n\to\infty)}$$

$$\Longrightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ (war bereits bewiesen)}$$

(b) $f(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin x & k = 2j, j \text{ gerade} \\ -\sin x & k = 2j, j \text{ ungerade} \\ \cos x & k = 2j+1, j \text{ gerade} \\ -\cos x & k = 2j+1, j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^j \sin x & k = 2j \\ (-1)^j \cos x & k = 2j+1 \end{cases}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\left[\quad f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k = 2j \\ (-1)^j & k = 2j+1 \end{cases} \quad\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(2j+1)}(0)}{(2jn)!}x^{2j+1} + \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} + \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\Longrightarrow \left|\sin x - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2j+1}}{(2j+1)!}\right| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0 \ (n \to \infty)$$

$$\Longrightarrow \sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} \text{ (Def. des Sinus!)}$$

(c) $f(x) = \ln(1+x)$ $\quad (x > -1)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad (x > -1)$

$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ $(k \in \mathbb{N})$ (durch vollst. induktion)

$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ $(k \in \mathbb{N}), f(0) = \ln 1 = 0.$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{|1+\xi|^{n+1}} \frac{1}{n+1} \underset{\substack{0\leq x\leq 1\\ 0\leq\xi\leq x}}{\underset{\uparrow}{\leq}} \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n\to\infty)$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \ (0 \leq x \leq 1)$$

Diese Gleichung gilt (o. Bew.) sogar für $-1 < x \leq 1$.

Spezialfall $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

(d) Binomialreihe

$f(x) = (1+x)^\alpha$ $(x > -1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0)$

$f^{(k)}(x) = \alpha \cdot \frac{d^{k-1}}{dx^{k+1}}(1+x)^{\alpha-1} = \alpha(\alpha-1)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(1+x)^{\alpha-2} = \alpha(\alpha-1)\dots\big(\alpha-(k-1)\big)(1+x)^{\alpha-k}$

$$\Longrightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots\big(\alpha-(k-1)\big)}{k!}}_{\binom{\alpha}{k}:=} + \binom{\alpha}{n+1} \cdot (1+\xi)^{\alpha-(n+1)} \cdot x^{n+1}$$

Betrachte nun den Fall $\alpha > 0$. $\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \frac{\alpha}{n} \underbrace{\left|\frac{\alpha-1}{1}\right|}_{\left|\frac{\alpha}{n-1}-1\right|} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left|\frac{\alpha-(n-1)}{n-1}\right|}_{\left|\frac{\alpha}{n-1}-1\right|} =$

$\frac{\alpha}{n} \underbrace{|1-\alpha| \cdot |1-\frac{\alpha}{2}| \cdot \ldots \cdot |1-\frac{\alpha}{n-1}|}_{\substack{\text{beschränkt}\\ \text{(unabh. von } n)}} \to 0 \ (n\to\infty)$

Die Produkte $|1-\alpha| \cdot |1-\frac{\alpha}{2}| \dots |1-\frac{\alpha}{n-1}|$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ bleiben beschränkt, weil für $k \geq \alpha$ $|1-\frac{\alpha}{k}| = 1 - \frac{\alpha}{k} \leq 1$ gilt, also nur eine feste Zahl von Faktoren größer als 1 sein kann. $\left|(1+x)^\alpha - \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k\right| =$

$\underbrace{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}_{\to 0\ (n\to\infty)} \cdot \underbrace{\frac{1}{|1+\xi|^{n+1-\alpha}} \cdot |x|^{n+1}}_{\substack{\leq 1 \text{ für}\\ 0\leq x\leq 1 \text{ und}\\ n+1\geq\alpha\ (\xi\\ \text{liegt zwischen}\\ 0 \text{ und } x!)}}$

$$\Longrightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (0 \leq x \leq 1, \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}_0)$$

Es gilt sogar (o. Bew.):

$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $(-1 \leq x \leq 1, \alpha \geq 0)$

$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $(-1 < x < 1, \alpha < 0)$

Anwendung: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \dots$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \tfrac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \tfrac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!}x^4 + \dots$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \dots$$
(liefert gute Näherung für $0 < |x| \underbrace{\ll}_{\text{„viel kleiner"}} 1$)

Bemerkung: Leider besitzt nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion eine Taylorreihe, die gegen sie konvergiert.

Beispiel: (Cauchy) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ ist beliebig oft differenzierbar und es gilt $f^{(k)}(0) = 0$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

[Die Taylorreihe ist die Vollfunktion.]

Beweis: Durch vollständige Induktion zeigt man leicht

$$f^{(k)}(x) = p_k\big(\frac{1}{x}\big)e^{-\frac{1}{x^2}} \ (x \neq 0) \text{ mit } \operatorname{grad} p_k = 3k$$

[$A(0) : f^{(0)}(x) = p_0\big(\frac{1}{x}\big)e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit $p_0 = 1$, d.h. $\operatorname{grad} p_0 = 0$

$$A(k) \Rightarrow A(k{+}1) : \frac{d}{dx}\Big(p_k\big(\frac{1}{x}\big)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\Big) = -\frac{1}{x^2}p_k'\big(\frac{1}{x}\big)e^{-\frac{1}{x^2}} + \big(-\frac{2}{x^3}\big)e^{-\frac{1}{x^2}}p_k\big(\frac{1}{x}\big)$$
$$= \Big(\underbrace{-\frac{1}{x^2}p_k'\big(\frac{1}{x}\big) - \frac{2}{x^3}p_k\big(\frac{1}{x}\big)}_{p_{k+1}(\frac{1}{x})}\Big)e^{-\frac{1}{x^2}}, \ p_{k+1}(x) = \underbrace{-x^2p_k'(x)}_{\text{Grad: } 3k+1} - \underbrace{2x^3p_k(x)}_{\text{Grad: } 3k+3} \qquad (12)$$

]

$f^{(k)}(0) = 0$

[$B(0) : f^{(0)} = 0$ nach Def.

$$B(k) \Rightarrow B(k{+}1) : f^{(k+1)}(0) = \lim \frac{f^{(k)}(x) - \overbrace{f^{(k)}(0)}^{0}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}p_k\big(\frac{1}{x}\big)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

]

[wegen $\left|\frac{1}{x}p_k\big(\frac{1}{x}\big)e^{-\frac{1}{x^2}}\right| = \frac{1}{|x|}\cdot\left|p_k\big(\frac{1}{x}\big)\right|e^{-\frac{1}{x^2}} \leq \underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\to\infty}|p_k|\big(\frac{1}{|x|}\big)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$

$|p_k|(x) := \sum |a_i| x^i$

$$\lim_{y\to\infty} y p_k(y) \underbrace{e^{-y^2}}_{\leq e^{-y}\ (y\geq 1)} = 0$$

$$y^\alpha e^{-y} \to 0 \ (y \to \infty, a \geq 0) \quad \Big]$$

§3: $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ (|x| < R), R > 0$ Konvergenzradius

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1$, d.h. f differenzierbar in 0

5.18 Satz (gliederweise Differentiation einer Potenzreihe) *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$.

Dann ist die Potenzreihe in $(-R, R)$ *differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k$$

Beweis: $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ (|x| < R)$. Sei $|x| < R$ und r mit $|x| < r < R$. Sei h mit $0 < |h| < R - |x|$ beliebig.

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k k x^{k-1}\right|$$

$$=\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(x+h)^k-\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k}{h}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k k x^{k-1}\right|$$

$$=\left|\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{(x+h)^k-x^k}{h}}_{\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\frac{(x+h)^k-x^k}{h}}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k k x^{k-1}\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{1}{h}\big((x+h)^k-x^k-hkx^{k-1}\big)\right|$$

$$=\frac{1}{|k|}\left|\sum_{k=2}^{\infty}a_k\big(\underbrace{(x+h)^k-x^k-hkx^{k-1}}_{g(h+x)-g(x)-hg'(x)\ \overset{\uparrow}{=}\ \frac{h^2}{2}g''(\xi)=\frac{h^2}{2}k(k-1)\xi^{k-2}}\big)\right|$$

Taylor mit ξ zwischen x und $x+h$

$g(x):=x^k$

$$=|h|\cdot\left|\sum_{k=2}^{\infty}a_k\frac{k(k-1)}{2}\cdot\xi^{k-2}\right|$$

$$\leq|h|\cdot\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\frac{k(k-1)}{2}|\xi|^{k-2}$$

$$|\xi|\leq|x|+|h|\leq r<R$$

$$\leq|h|\cdot\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\frac{k(k-1)}{2}r^{k-2}}_{<\infty}$$

$<\infty$, weil die Potenzreihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty}a_k\frac{k(k-1)}{2}x^{k-2}$ denselben Konvergenzradius wie $x^2\sum_{k=2}^{\infty}a_k\frac{k(k-1)}{2}x^{k-2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\frac{k(k-1)}{2}x^k$ hat. Diese wiederum hat den Konvergenzradius $\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|\frac{k(k-1)}{2}}}=\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$, weil $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{k(k-1)}{2}}=1$ (vgl Satz 3.19)

Beispiel: $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\ (|x|<1)$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + \ldots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \; (|x| < 1)$

$\Longrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$

Bemerkung: Durch verschachtelte Anwendung von 5.18 erhält man

$$\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n} \; (|x| < R)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}(k+n)(k+n-1)\ldots(k+1)x^k$$

und insbesondere

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right|_{x=0} = a_n \cdot n!$$

Für $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gilt also $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

5.19 Satz (gliedweise Integration einer Potenzreihe) *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$, $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $(|x| < R)$ *und* $F : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion mit* $F' = f$.
(Bezeichnung später: F *Stammfunktion von* f*).*
Dann gilt

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \; (|x| < R)$$

Zum Beweis benötigen wir eine kleine Folgerung aus dem Mittelwertsatz
5.20 Satz *Sei* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar,* $g'(x) = 0 \; \big(x \in (a, b,)\big)$.
Dann ist g *konstant.*

Beweis: Seien $x, x_0 \in (a, b)$. O.E.d.A. $x > x_0$.
g ist stetig in $[x_0, x]$, weil g dort differenzierbar ist.
g ist differenzierbar in (x_0, x), also gilt nach dem MWS
$g(x) - g(x_0) = \underbrace{g'(\xi)}_{0}(x - x_0)$, d.h. $g(x) = g(x_0)$.

Beweis von Satz 5.19: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = x \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \cdot x^k$

hat den Konvergenzradius $\dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{k+1}\right|}} = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \underbrace{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}}_{1}} = R$

Damit folgt nach Satz 5.18

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Also

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right) = \underbrace{F'(x)}_{f(x)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \ (|x| < R)$$

Nach Satz 5.20 ergibt sich

$$F(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = F(0) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} 0^{k+1} = F(0)$$

Beispiele: (a) $F(x) = \ln(1+x)$

$F'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \ (|x| < 1)$

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

$\underbrace{F(x)}_{\ln(1+x)} - \underbrace{F(0)}_{\ln 1 = 0} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot x^{k+1} \ (|x| < 1)$

(b) $F(x) = \arctan(x) \ (x \in \mathbb{R})$

$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \ (x \in \mathbb{R})$

$\frac{1}{1+x^2} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \ldots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \ (|x| < 1)$

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \ (|x| < 1)$

$\underbrace{F(x)}_{\arctan(x)} - \underbrace{\underbrace{F(0)}_{\arctan(0)}}_{0} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \overline{x^{2k+1} 2k+1} (|x| < 1)$

Bemerkung: Es gilt sogar $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ (Leibnizreihe)

Das folgt allerdings nicht aus dem bereits Bewiesenen, sondern erst aus

5.21 Abelscher Grenzwertsatz *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \in (0, \infty)$.
Falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ *konvergiert, dann gilt* $\lim\limits_{\substack{x \to R \\ x < R}} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k R^k$.
Falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (-R)^k$ *konvergiert, dann gilt* $\lim\limits_{\substack{x \to -R \\ x > -R}} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (-R)^k$.